L.Thibault

Chapitre-I Espaces topologiques

1 Axiome de Zermelo

Commençons par énoncer l'axiome du choix de Zermelo.

Axiome du choix de Zermelo : Soit I un ensemble non vide et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles non vides d'un ensemble X. Il existe une application $f : I \to X$ telle que $f(i) \in A_i$ pour tout $i \in I$.

On va établir trois principes équivalents à l'axiome du choix. Pour cela, rappelons d'abord quelques notions concernant les ensembles ordonnés.

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble non vide E (i.e. un sous-ensemble non vide de $E \times E$) est dite être une *relation d'ordre* sur E quand elle est :
réflexive : $x\mathcal{R}x$ pour tout $x \in E$;
antisymétrique : $(x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \ \Rightarrow\ (\,x = y\,)$;
transitive : $(x, y, z \in E,\ x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \ \Rightarrow\ (\,x\mathcal{R}z\,)$.

On note en général $\preceq$ ou $\leq$ une relation d'ordre sur E et on dit que le couple $(E, \preceq)$ est un *ensemble ordonné*.

On dit qu'un sous-ensemble non vide C de E est *totalement ordonné* ou est une *chaine* (pour l'ordre induit) si pour toute paire d'éléments $x, y \in C$, on a $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

Un élément z de l'ensemble ordonné $(E, \preceq)$ est dit être un élément *maximal* (resp. *minimal*) s'il n'existe dans E aucun élément $y \in E$ différent de z vérifiant $z \preceq y$ (resp. $y \preceq z$).

Rappelons que, pour un sous-ensemble non vide S de l'ensemble ordonné $(E, \preceq)$, un élément $m \in E$ est dit être un *majorant* (resp. *minorant*) de S dans E quand pour tout $x \in S$ on a $x \preceq m$ (resp. $m \preceq x$). Quand il existe un majorant (resp. minorant) de S qui appartient à S, il est aisé de voir qu'un tel majorant (resp. minorant) est unique et que c'est le plus grand (resp. plus petit) élément de S ; dans ce cas il est noté $\max_{\preceq} S$ (resp. $\min_{\preceq} S$). **Il n'en existe pas toujours** (**Exer :** donner des exemples).

On dit que l'ensemble ordonné $(E, \preceq)$ est *bien ordonné* quand tout sous-ensemble non vide de E admet un plus petit élément.

Théorème 1.1 *Chacune des assertion suivantes est équivalente à l'axiome du choix.*
(a) **Théorème ou Principe de chaine maximale (ou de maximalité) de Hausdorff :** *Tout ensemble non vide ordonné admet au moins une chaine maximale (pour l'inclusion), i.e. pour tout ensemble ordonné non vide $(E, \preceq)$ il existe au moins une chaine qui n'est incluse dans aucune autre.*
(b) **Lemme de Zorn :** *Si $(E, \preceq)$ est un ensemble ordonné non vide tel que toute chaine admette un majorant dans E (autrement dit $(E, \preceq)$ est ordonné inductivement), alors E admet au moins un élément maximal relativement à $\preceq$.*
(c) **Théorème ou principe de bon ordre de Zermelo :** *Tout ensemble non vide peut être bien ordonné, i.e. sur tout ensemble non vide E il existe au moins une relation d'ordre $\preceq$ tel que $(E, \preceq)$ soit bien ordonné.*

2 Topologie sur un ensemble

Rappelons que l'on appelle ouvert de $\mathbb{R}$ toute réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Les propriétés connues de stabilité des ouverts de $\mathbb{R}$ pour une réunion quelconque et pour une intersection d'un nombre fini conduisent à considérer les classes de la définition suivante.

Définition 2.1 (**Topologie**) *On appelle* **topologie** *sur un ensemble non vide X toute classe $\mathcal{O}$ de parties de X telle que*
(i) $X \in \mathcal{O}$ *et* $\emptyset \in \mathcal{O}$ *;*
(ii) **Stabilité pour une réunion quelconque :** *Pour toute famille* $(U_i)_{i\in I}$ *de* $\mathcal{O}$ *on a* $(\cup_{i\in I} U_i) \in \mathcal{O}$ *;*
(iii) **Stabilité par intersection finie :** $(U_1 \in \mathcal{O}$ et $U_2 \in \mathcal{O}) \Rightarrow (U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O})$.

Dans ce cas, on dit que $(X, \mathcal{O})$ *est un* **espace topologique** *et tout* $U \in \mathcal{O}$ *est appelé un* **ouvert** *de* $(X, \mathcal{O})$. *Parfois on notera* τ *au lieu de* $\mathcal{O}$ *une topologie sur un ensemble.*

Exemples.
(a) Pour tout ensemble non vide X, la classe $\mathcal{P}(X)$ de toutes ses parties est une topologie sur X, dite *topologie discrète* de X.
(b) La classe $\{\emptyset, X\}$ est une toplogie sur X, dite *topologie grossière de X.*
(c) Si $\mathcal{O}$ est une topologie sur X et si A est un sous-ensemble non vide de X, alors la classe $\{U \cap A : U \in \mathcal{O}\}$ est une topologie sur A dite *topologie induite sur A* par $\mathcal{O}$ ou *topologie relative* de A correspondant à $\mathcal{O}$.
(d) L'intersection d'une famille quelconque de topologies sur un ensemble X est une topologie sur l'ensemble X.
(e) Soit (X, d) un espace métrique. Rappelons que $B(a, r) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$ (resp. $B[a, r] := \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$), où $a \in X$ et $r \in]0, +\infty[$, désigne la *boule ouverte* (resp. *fermée*) dans X de centre a et de rayon r. Soit $\mathcal{O}_d$ la classe constituée de $\emptyset$ et des réunions de boules ouvertes de X, i.e. $U \neq \emptyset$ est dans $\mathcal{O}_d$ si et seulement si U est la réunion d'une famille de boules ouvertes de X.

On vérifie (**Exer**) que cette classe $\mathcal{O}_d$ est une topologie sur X. On l'appelle la topologie sur X associée à (ou engendrée par) la distance d.

On verifie également (**Exer**) que pour une partie non vide U de X on a $U \in \mathcal{O}_d$ si et seulement si pour tout $x \in U$ il existe un réel $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset U$.

Si d' est une autre distance sur X telle que $\mathcal{O}_{d'} = \mathcal{O}_d$, on dit que les distances d et d' sur X sont *topologiquement équivalentes.* Evidemment l'équivalence métrique des deux distances d et d' (i.e. l'existence de deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y)$ pour tout $(x, y) \in X \times X$) implique leur équivalence topologique (**Exer**).

Si pour un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ il existe une distance telle que la topologie associée soit égale à $\mathcal{O}$, on dit que l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est *métrisable.*
(f) La classe $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ constituée de $\emptyset$ et des réunions d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$ appelée la *topologie naturelle ou usuelle* de $\mathbb{R}$.
(g) Pour $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, soit $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$ la classe constituée des ensembles $U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$, des ensembles $U \cup [-\infty, r[$, $U \cup]s, +\infty]$ et $U \cup [-\infty, r[\cup]s, +\infty]$, avec $U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ et $r, s \in \mathbb{R}$ (où $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ désigne comme ci-dessus la topologie naturelle de $\mathbb{R}$). La classe $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$ est une topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$ appelée la *topologie naturelle ou usuelle* de $\overline{\mathbb{R}}$. Si l'on convient d'étendre la fonction Arctan à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $\mathrm{Arctan}(-\infty) = -\pi/2$ et $\mathrm{Arctan}(+\infty) = \pi/2$, alors on peut vérifier (**Exer**) que la fonction $d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+$ avec $d(x, y) = |\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$, est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$ et que la topologie associée à cette distance est égale à $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Ainsi la topologie naturelle de $\overline{\mathbb{R}}$ est métrisable.

(h) La topologie naturelle $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ coincide avec la topologie induite sur $\mathbb{R}$ par la topologie naturelle $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$ de $\overline{\mathbb{R}}$ (**Exer**). ■

Précisons que l'on dit parfois qu'une topologie $\mathcal{O}'$ sur X est **moins fine** ou **moins forte** ou **plus faible** (resp. **plus fine** ou **plus forte** ou **moins faible**) que la topologie $\mathcal{O}$ quand $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}' \supset \mathcal{O}$).

Donnons les définitions de quelques premières notions attachées à un espace topologique.

Définition 2.2 *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique.*
(a) Si pour un ensemble A de X on a $\complement_X A \in \mathcal{O}$, on dit que A est **fermé** *dans $(X, \mathcal{O})$.*
(b) Pour $A \subset X$, la réunion de tous les ouverts de X inclus dans A est applelé **l'intérieur** *de A dans X et on note $\mathrm{int}_X A$ ou $\mathrm{int}_{\mathcal{O}} A$ ou $\mathrm{int}\, A$ ou $\overset{o}{A}$.*
(c) Pour $A \subset X$, l'intersection de tous les fermés de X contenant A est applelé **l'adhérence** *ou* **la fermeture** *de A dans X et on note $\mathrm{adh}_X A$ ou $\mathrm{adh}_{\mathcal{O}} A$ ou $\mathrm{adh}\, A$ ou $\overline{A}$.*
(d) La **frontière** *d'une partie A de X est l'ensemble $\mathrm{bd}_X A := (\mathrm{adh}_X A) \cap \big(\mathrm{adh}_X(\complement_X A)\big)$. On le note aussi parfois ∂A.*
(e) Un sous-ensemble V de X est dit être un **voisinage** *de $a \in X$ s'il existe $U \in \mathcal{O}$ tel que $a \in U \subset V$. La classe de tous les voisinages de a sera notée $\mathcal{V}_X(a)$ ou $\mathcal{V}_{\mathcal{O}}(a)$ ou $\mathcal{V}(a)$.*
(f) Un point $a \in X$ est dit être un **point d'accumulation** *d'un sous-ensemble A de X quand pour tout voisinage V de a nous avons $V \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. L'ensemble des points d'accumulation de A est noté $\mathrm{acc}_X A$ ou $\mathrm{acc}_{\mathcal{O}} A$ ou $\mathrm{acc}\, A$.*
(g) Un ensemble $A \subset X$ est dit être **connexe** *s'il n'est pas (pour la topologie induite sur A) la réunion de deux* **ouverts relatifs** *dans A non vides disjoints.*

Le théorème suivant énonce un certain nombre de propriétés des concepts ci-dessus.

Théorème 2.3 *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Alors les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Les ensembles $\emptyset$ et X sont fermés dans X.
(b) L'intersection d'une famille quelconque de fermés de X est un fermé de X.
(c) La réunion d'un **nombre fini** *de fermés de X est un fermé de X.*
(d) Pour $A \subset X$, l'intérieur $\mathrm{int}_X A$ est le plus grand ouvert de X **inclus** *dans A.*
(e) Pour $A \subset X$, l'adhérence $\mathrm{adh}_X A$ est le plus petit fermé de X **contenant** *A.*
(f) Un sous-ensemble A de X est ouvert (resp. fermé) dans X si et seulement si $\mathrm{int}_X A = A$ (resp. $\mathrm{adh}_X A = A$).
(g) Soient $A \subset X$ non vide et $a \in X$. Alors $a \in \mathrm{int}_X A$ si et seulement si il existe un voisinage V de a tel que $V \subset A$. Ainsi A est ouvert si et seulement si A est un voisinage de chacun de ses points.
De même, $a \in \mathrm{adh}_X A$ si et seulement si pour tout voisinage V de a nous avons $V \cap A \neq \emptyset$.
(h) Un sous-ensemble A de X est fermé dans X si et seulement $\mathrm{acc}_X A \subset A$.
(i) Un sous-ensemble A de X est connexe s'il n'est pas (pour la topologie induite sur A) la réunion de deux **fermés relatifs** *dans A non vides disjoints.*
Pour des parties A, B de X et une **famille quelconque** *$(A_i)_{i \in I}$ de X on a :*
(j) $\complement_X(\mathrm{int}_X A) = \mathrm{adh}_X(\complement_X A)$ et $\mathrm{bd}_X \mathrm{A} = (\mathrm{adh}_X A) \setminus (\mathrm{int}_X A)$.
(k) $\mathrm{adh}_X(A \cup B) = (\mathrm{adh}_X A) \cup (\mathrm{adh}_X B)$ et $\mathrm{int}_X(A \cap B) = (\mathrm{int}_X A) \cap (\mathrm{int}_X B)$.
(l) $\cup_{i \in I} \mathrm{adh}_X A_i \subset \mathrm{adh}_X(\cup_{i \in I} A_i)$ et $\cap_{i \in I} \mathrm{int}_X A_i \supset \mathrm{int}_X(\cap_{i \in I} A_i)$.

Démonstration. Exercice. ■

Il est des fois plus facile de travailler avec une sous-classe particulière de voisinages.

Définition 2.4 *Soit a un point d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$. On dit qu'une classe $\mathcal{S}$ de parties de X est un* **système fondamental ou base de voisinages de** *a dans X si tout $S \in \mathcal{S}$ est un voisinage de a dans X et si pour tout voisinage V de a dans X il existe $S \in \mathcal{S}$ tel que $S \subset V$.*

Ainsi si $\mathcal{S}$ est une base de voisinages de $a \in X$ la seconde assertion de (g) du Théorème 2.3 peut être retraduite en écrivant que $a \in \mathrm{adh}_X A$ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{S}$ on $V \cap A \neq \emptyset$.

Il est également souvent commode de travailler avec une classe particulière d'ouverts au lieu de toute une topologie. Les deux classes suivantes sont parmi les plus importantes.

Définition 2.5 (Base et sous-base d'une topologie) *Soit $\mathcal{O}$ une topologie sur un ensemble X. On dit qu'une classe $\mathcal{B}$ de parties de X est une* **base de la topologie** *$\mathcal{O}$ quand $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ et quand tout ensemble non vide $U \in \mathcal{O}$ est la réunion d'une famille d'ensembles appartenant à $\mathcal{B}$.*

Une classe $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ est une **sous-base de la topologie** *$\mathcal{O}$ quand la classe constituée des intersections de nombre fini d'ensembles appartenant à $\mathcal{S}$ est une base de la topologie $\mathcal{O}$.*

Exemples.
(a) La classe des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est une base de la topologie naturelle de $\mathbb{R}$.
(b) La classe des intervalles $]r, s[$, $[-\infty, r[$ et $]s, +\infty]$, avec $r, s \in \mathbb{R}$, est une base de la topologie naturelle de $\overline{\mathbb{R}}$ (**Exer**).
(c) La classe des singletons de X est une base de la topologie discrète de X.
(d) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, la classe des intervalles $[a, s[$ et $]r, b]$ avec $s \in]a, b]$ et $r \in [a, b[$ est une sous-base de la topologie naturelle de $[a, b]$ (i.e. la topologie induite sur l'intervalle $[a, b]$ par la topologie naturelle de $\mathbb{R}$). ■

Proposition 2.6 *Soit $\mathcal{B}$ une classe de parties d'un ensemble non vide X. Il existe une topologie sur X dont $\mathcal{B}$ est une base si et seulement si les deux propriétés (a) et (b) suivantes ont lieu :*
(a) $\cup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;
(b) pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $x \in B_1 \cap B_2$ il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Dans ce cas la topologie sur X dont $\mathcal{B}$ est la base est unique.

Démonstration. Exercice. ■

Soit $\mathcal{A}$ une classe de parties d'un ensemble non vide X. L'intersection de toutes les topologies sur X contenant $\mathcal{A}$ est une topologie sur X contenant $\mathcal{A}$ et c'est la plus petite toplogie sur X contenant $\mathcal{A}$. On l'appelle la *topologie sur X engendrée par la classe $\mathcal{A}$* et on note $\mathrm{Top}_X(\mathcal{A})$.

Proposition 2.7 *Soit $\mathcal{S}$ une classe de parties d'un ensemble non vide X et $\mathcal{O}$ une topologie sur X. Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) La classe $\mathcal{S}$ est une sous-base de la topologie $\mathcal{O}$ si et seulement si $\cup_{S \in \mathcal{S}} S = X$ et $\mathrm{Top}_X(\mathcal{S}) = \mathcal{O}$.
(b) Il existe une topologie sur X dont $\mathcal{S}$ est une sous-base si et seulement si $\cup_{S \in \mathcal{S}} S = X$.

Démonstration. Exercice. ■

Pour deux parties A et B d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ avec $A \subset B$, on dit que A est *dense* dans B quand $B \subset \mathrm{adh}_X A$. Si X contient une partie **dénombrable** dense dans X, on dit que l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est *séparable*.

Proposition 2.8 *(a) Tout espace topologique à base dénombrable est séparable.*
(b) Un espace topologique **métrisable** *est à base dénombrable si et seulement s'il est séparable.*

Démonstration. Exercice. ■

L'un des intérêts des espaces topologiques à base dénombrable est que dans de tels espaces tout point admet un système fondamental dénombrable de voisinages, car si $\mathcal{B}$ est une base dénombrable d'un tel espace X, pour chaque point $a \in X$ la classe $\mathcal{S}(a) := \{U : a \in U \text{ et } U \in \mathcal{B}\}$ est dénombrable et elle est un système fondamental de voisinages a dans X. Par conséquent, comme on va le voir dans la proposition ci-dessous, on peut dans de tels espaces caractériser les concepts d'adhérence, d'ensemble fermé etc à l'aide de convergence de suite. Disons qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace topologique *converge* ou *tend* vers un point $x \in X$ quand pour tout voisinage V de x dans X, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ (dépendant de V) tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on a $x_n \in V$. On exprime ceci en écrivant $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Proposition 2.9 *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique dont* **tout point admet un système fondamental dénombrable de voisinages** *(ce qui est vrai en particulier si* $(X, \mathcal{O})$ *est à* **base dénombrable***). Soient* $a \in X$ *et* $A \subset X$*. Les assertions suivantes ont lieu :*
(a) Le point $a \in \operatorname{adh}_X A$ *(resp.* $a \in \operatorname{acc}_X A$*) si et seulement s'il existe une suite de points de* A *(resp. de* $A \setminus \{a\}$*) convergeant vers* a *dans l'espace* X*.*
(b) L'ensemble A *est fermé si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* A *convergeant vers un point* a *de* X *on a l'inclusion* $a \in A$*.*

Démonstration. Exercice. ■

Les propriétés (a) et (b) de la proposition précédente n'ont pas lieu dans beaucoup d'espaces topologiques non métrisables. Ceci conduit à introduire le concept de suite généralisée. Rappelons au préalable que l'on appelle *préordre* sur un ensemble non vide J toute relation binaire $\preceq$ sur J qui est *réflexive et transitive.* Si $\preceq$ est un préordre sur J, on dit que le couple $(J, \preceq)$ est *préordonné.* Quand de plus, pour toute paire $j_1, j_2 \in J$ il existe $j_3 \in J$ tel que $j_1 \preceq j_3$ et $j_2 \preceq j_3$, on dit que $\preceq$ est un **préordre filtrant croissant** ou que $(J, \preceq)$ est un ensemble préordonné filtrant croissant. Quand il n'y a pas d'ambiguité on ne précise pas $\preceq$.

Définition 2.10 (Suite généralisée) *Si* $(J, \preceq)$ *est un ensemble préordonné filtrant croissant, toute famille* $(x_j)_{j\in J}$ *d'un ensemble* X *est appelée une* **suite généralisée** *("net" en anglais) de* X*.*

Si X *est muni d'une topologie* $\mathcal{O}$*, (par analogie au cas des suites) on dit que la suite généralisée* $(x_j)_{j\in J}$ *converge ou tend vers un point* $x \in X$ *quand pour tout voisinage* V *de* x *dans* X *il existe un* $j_0 \in J$ *(dépendant de* V*) tel que pour tout* $j \in J$ *vérifiant* $j_0 \preceq j$ *on a* $x_j \in V$*. Dans ce cas on écrit* $x_j \xrightarrow[j\in J]{} x$*.*

Exemples.
(a) Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment une suite généralisée.
(b) Soient $(J_1, \preceq_1)$ et $(J_2, \preceq_2)$ deux ensembles préodonnées filtrants croissants et soit le préordre produit $\preceq$ défini sur $J_1 \times J_2$ par $(j_1, j_2) \preceq (j_1', j_2')$ si et seulement si $j_1 \preceq_1 j_1'$ et $j_2 \preceq j_2'$. Alors $\preceq$ est un préordre filtrant croissant.
(c) Soit a un point d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ et soit $\mathcal{S}$ une base de voisinages de a. La relation d'ordre $\supset$ sur l'ensemble $\mathcal{S}$ est évidemment filtrante croissante. Si pour une suite généralisée $(x_V)_{V\in\mathcal{S}}$ de X, indexée par une base $\mathcal{S}$ de voisinages de $a \in X$, on a $x_V \in V$ pour tout $V \in \mathcal{S}$, alors on vérifie (**Exer**) que $x_V \xrightarrow[V\in\mathcal{S}]{} a$.
(d) Il est parfois nécessaire de préciser le préordre considéré sur l'ensemble d'indices. Prenons par exemple $T :=]0,1[$ et pour chaque $t \in T$ posons $x_t := t$ pour tout $t \in T$. Relativement à l'ordre

naturel $\leq$ de T (qui est filtrant croissant) on a $x_t \underset{t\in T}{\longrightarrow} 1$ dans $\mathbb{R}$ mais relativement à l'ordre inverse $\geq$ sur T (qui est aussi filtrant croissant) on a $x_t \underset{t\in T}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathbb{R}$. ■

Proposition 2.11 *Soient $(X, \mathcal{O}$ un espace topologique, $a \in X$ et $A \subset X$. Les assertions suivantes ont lieu :*
(a) Le point $a \in \mathrm{adh}_X A$ (resp. $a \in \mathrm{acc}_X A$) si et seulement s'il existe une suite généralisée de points de A (resp. de $A \setminus \{a\}$) qui converge vers a.
(b) L'ensemble A est fermé dans X si et seulement si pour toute suite généralisée $(x_j)_{j\in J}$ de points de A convergeant vers un point a de X on a l'inclusion $a \in A$.

Démonstration. Exercice. ■

Dans le but d'avoir l'unicité de limite d'une suite généralisée convergente, on introduit le concept d'espace séparé.

Définition 2.12 (Espace topologique séparé) *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit être* **séparé** *(ou de Hausdorff) quand pour toute* **paire d'éléments différents** *x, y de X il existe un voisinage V_x de x et un voisinage V_y de y dans X tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Evidemment tout espace topologique **métrisable** est séparé.

Cette propriété de séparation de Hausdorff permet de caractériser les espaces topologiques où toute suite généralisée convergente ne converge que vers un seul point.

Proposition 2.13 *Un espace topologique est* **séparé** *(Hausdorff) si et seulement si toute suite généralisée convergente de cet espace ne converge que vers un seul point.*

Démonstration. Exercice. ■

Ainsi quand l'espace topologique est séparé (Hausdorff), on écrit parfois $\lim_{j\in J} x_j$ au lieu de $x_j \underset{j\in J}{\longrightarrow} x$ et on dit que x est *la limite* de la suite généralisée $(x_j)_{j\in J}$.

Nous allons maintenant considérérer une topologie naturelle sur le produit cartésien d'une famille d'ensembles dont chacun est muni d'une topologie donnée. Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles non vides d'un ensemble Z et soit pour chaque $i \in I$ une topologie $\mathcal{O}_i$ sur X_i. L'ensemble $\prod_{i\in I} X_i$ des applications f de I dans Z avec $f(i) \in X_i$ pour tout $i \in I$ est non vide (d'après l'axiome du choix de Zermelo quand I est un ensemble infini quelconque). Pour chaque $k \in I$, l'application $\pi_k : \prod_{i\in I} X_i \to X_k$ qui à $f \in \prod_{i\in I} X_i$ associe $\pi_k(f) := f(k)$ est appelée l'application **k-ième-projection**.

Il sera parfois commode de noter $(x_i)_{i\in I}$ l'application f qui à chaque $i \in I$ associe $x_i \in X_i$.

Définition 2.14 (Topologie produit) *La classe des $\prod_{i\in I} U_i$, où $U_i \in \mathcal{O}_i$ pour tout $i \in I$ et où $U_i = X_i$* **sauf au plus pour un nombre fini** *de $i \in I$, vérifie évidemment les propriétés (a) et (b) de la Proposition 2.6 et donc il existe une topologie (et une seule) sur $\prod_{i\in I} X_i$ dont elle est* **une base**. *Cette topologie est appelée la* **topologie produit** *sur $\prod_{i\in I} X_i$ des topologies $\mathcal{O}_i$.*

Sauf mention contraire, un espace produit sera toujours muni de la topologie produit.

Evidemment la classe des $\overset{-1}{\pi_i}(U_i)$ pour $i \in I$ et $U_i \in \mathcal{O}_i$ (i.e. la classe des $\prod_{i\in I} U_i$, où $U_i \in \mathcal{O}_i$ pour tout $i \in I$ et où $U_i = X_i$ **sauf éventuellement pour un seul** $i \in I$) est **une sous-base** de cette topologie produit.

Si toutes les topologies $\mathcal{O}_i$ sont séparées (Hausdorff), alors la topologie produit est séparée (Hausdorff) (**Exer**).

Soit pour chaque $i \in I$ un ensemble non vide $A_i \subset X_i$ et soit $\mathcal{O}'_i$ la topologie induite sur A_i par la topologie $\mathcal{O}_i$. On vérifie (**Exer**) que la topologie produit (sur $\prod_{i\in I} A_i$) des topologies induites $\mathcal{O}'_i$ est égale à la topologie induite sur $\prod_{i\in I} A_i$ par la topologie produit des $\mathcal{O}_i$.

Quand l'ensemble I est **fini**, par exemple $I = \{1, \cdots, p\}$, la base (dans la définition 2.14) ci-dessus est réduite à la classe des $U_1 \times \cdots \times U_p$ avec $U_i \in \mathcal{O}_i$ pour $i = 1, \cdots, p$.

Pour le cas d'un nombre fini d'espaces topologiques on a le résultat suivant.

Proposition 2.15 *Considérons un* **nombre fini** *de p espaces topologiques $(X_1, \mathcal{O}_1), \cdots, (X_p, \mathcal{O}_p)$ et munissons $X := \prod_{i=1}^{p} X_i$ de la topologie produit. Soient $A_1 \subset X_1, \cdots, A_p \subset X_p$. Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) L'ensemble $\prod_{i=1}^{p} A_i$ est ouvert dans X par rapport à la topologie produit si et seulement si chaque A_i est ouvert dans $(X_i, \mathcal{O}_i)$.
(b) $\mathrm{int}_X(\prod_{i=1}^{p} A_i) = \prod_{i=1}^{p} (\mathrm{int}_{X_i} A_i)$.
(d) L'ensemble $\prod_{i=1}^{p} A_i$ est fermé dans X par rapport à la topologie produit si et seulement si chaque A_i est fermé dans $(X_i, \mathcal{O}_i)$.
(d) $\mathrm{adh}_X(\prod_{i=1}^{p} A_i) = \prod_{i=1}^{p} (\mathrm{adh}_{X_i} A_i)$.

Démonstration. Exercice. ■

Les **assertions (a) et (b)** de la proposition ci-dessus **n'ont pas lieu** dans le cas d'un nombre **infini** d'espaces. L'étude de l'adhérence et de l'intérieur du produit cartésien dans un nombre infini d'espaces fera l'objet d'un exercice de TD.

3 Applications continues

Commençons par énoncer la définition suivante qui n'est qu'une adaptation de celle déjà connue pour les fonctions réelles d'une variable réelle.

Définition 3.1 (Continuité) *Soient $(X, \mathcal{O}_X$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques, $a \in X$ et $f : X \to Y$ une application de X dans Y. On dit que f est $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$*-**continue en** *$a$ (ou brièvement* **continue en** *a) quand pour tout voisinage W de $f(a)$ dans Y il existe un voisinage V de a dans X tel que $f(V) \subset W$; autrement dit quand pour tout voisinage W de $f(a)$ dans Y l'ensemble $\overset{-1}{f}(W)$ est un voisinage de a dans X.*

Si f est continue en tout point de X, on dit que f est continue sur X ou (brièvement) que f est continue.

Si A est un sous-ensemble de X avec $A \ni a$, on dit que f est continue en a **relativement à** *A quand pour la topologie induite sur A (par $\mathcal{O}_X$) la restriction de f à A est continue en a.*

Exempleset exercices.
(a) Toute application constante d'un espace topologique dans un autre est continue.

(b) Si X est muni de la topologie discrète, alors toutes les applications de X dans un espace topologique quelconque sont continues.
(c) Si X est muni de la topologie grossière et si l'espace topologique $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est séparé, alors (**Exer**) seules les applications constantes de X dans Y sont continues.
(d) Si $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont deux topologies sur le même ensemble X, alors l'application identité Id_X est $(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$-continue si et seulement si la topologie $\mathcal{O}'$ est **moins fine** que la topologie $\mathcal{O}$, i.e. $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.
(e) Si f est continue en a et si A est un sous-ensemble de X contenant a, alors la restriction $f|_A$ de f à A est continue en a relativement à A.
■

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 3.2 *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ et $(Z, \mathcal{O}_Z)$ trois espaces topologiques et $a \in X$. Soient deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. Si f est $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$-continue en a et si g est $(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Z)$-continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Z)$-continue en a.*

Le théorème suivant caractérise la continuité en un point à l'aide de suites généralisées.

Théorème 3.3 *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques, $a \in X$ et $f : X \to Y$.*
(a) L'application f est continue en a si et seulement si pour toute suite généralisée $(x_j)_{j\in J}$ convergeant vers a dans X la suite généralisée des images $(f(x_j))_{j\in J}$ converge vers $f(a)$ dans Y.
(b) Si le point a admet un système fondamental **dénombrable** *de voisinages (en particulier si $\mathcal{O}_X$ est* **à base dénombrable***), alors f est continue en a si seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a dans X la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ dans Y.*

Démonstration. Exercice. ■

Opérations usuelles.
(a) La somme (resp. le produit) de deux fonctions de X dans $\mathbb{K}$ continues en $a \in X$ est continue en a (**Exer**). Énoncer et établir le résultat concernant le quotient. On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
(b) Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et soit pour chaque $n \in \mathbb{N}$ une fonction $f_n : X \to \mathbb{K}$. Étendre (**Exer**) à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. série Σf_n) de fonctions les résultats connus de continuité quand X est un intervalle de $\mathbb{R}$ et quand il y a convergence uniforme. ■

Nous avons aussi une caractérisation similaire de la continuité relative. Nous allons énoncer ce résultat ainsi qu'une caractérisation en termes de limite relative. Soient deux espaces topologiques $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ et soient $A \subset X$, $a \in \mathrm{acc}_X A$ et f une application à valeurs dans Y et définie sur une partie de X contenant A. On dit que f *tend vers $b \in Y$ en a relativement à A* et on écrit $f(x) \xrightarrow[A\ni x\to a]{} b$ quand pour tout voisinage W de b dans Y il existe un voisinage V de a dans X tel que $f(V \cap A \setminus \{a\}) \subset W$. Evidemment quand $a \in A$, alors f tend vers b en a relativement à A si et seulement si la restriction $f|_A$ de f à A tend vers b en a pour la topologie induite sur A.

Quand la topologie $\mathcal{O}_Y$ est séparée, b est unique et on écrit $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = b$. Si de plus A est un **voisinage** de a on écrit simplement $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Proposition 3.4 *Soient deux espaces topologiques $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$, soient $A \subset X$, $a \in \mathrm{acc}_X A$ et f une application à valeurs dans Y et définie sur une partie de X contenant A, et soit $b \in Y$. Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) L'application f est continue en a relativement à A si et seulement si pour toute suite généralisée de $A \setminus \{a\}$ convergeant vers a la suite généralisée des images converge vers $f(a)$.

(b) Si l'espace topologique $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est séparé, alors $b = \lim_{A \ni x \to a} f(x)$ si et seulement si pour toute suite généralisée de $A \setminus \{a\}$ convergeant vers a la suite généralisée des images converge vers b.
(c) Si l'espace topologique $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est séparé, alors f est continue en a **relativement à** *A si et seulement si $f(a) = \lim_{A \ni x \to a} f(x)$.*

Démonstration. Exercice. ■

La proposition suivante fournit plusieurs caractérisations d'applications continues en tout point.

Proposition 3.5 *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(a) L'application f est continue.
(b) L'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X.
(c) L'image réciproque par f de tout fermé de Y est un fermé de X.
(d) Pour tout $B \subset Y$ on a $\overset{-1}{f}(\mathrm{adh}_Y B) \supset \mathrm{adh}_X \overset{-1}{f}(B)$.
(e) Pour tout $B \subset Y$ on a $\overset{-1}{f}(\mathrm{int}_Y B) \subset \mathrm{int}_X \overset{-1}{f}(B)$.
(f) Pour tout $A \subset X$ on a $f(\mathrm{adh}_X A) \subset \mathrm{adh}_Y f(A)$.
Si $\mathcal{S}$ est une **sous-base** *de $\mathcal{O}_Y$, alors chacune des assertions ci-dessus est équivalente à :*
(h) Pour tout $S \in \mathcal{S}$ l'ensemble $\overset{-1}{f}(S)$ est un ouvert de X.

Démonstration. Exercice. ■

On a aussi le résultat immédiat suivant.

Proposition 3.6 *L'image d'un ensemble connexe par une application continue est un ensemble connexe.*

Via la notion de continuité on peut définir aussi le concept de connexité par arcs. On dit qu'un sous-ensemble non vide A d'un espace topologique X est **connexe par arcs** quand pour chaque paire d'éléments $a, b \in A$ il existe une fonction continue $\varphi : [0, 1] \to X$ telle que $\varphi(t) \in A$ pour tout $t \in [0, 1]$ ainsi que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. On vérifie que tout sous-ensemble connexe par arcs est connexe (**Exer**).

Considérons maintenant le concept d'espace topologique engendré par une famille d'applications. Soient donc X un ensemble, $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques, et pour chaque $i \in I$ une application $g_i : X \to Y_i$ de X dans Y_i. L'intersection de toutes les topologies τ sur X rendant $(\tau, \mathcal{O}_i)$-continue chaque application g_i est la plus petite topologie sur X ayant cette propriété. On l'appelle la **topologie engendrée** sur X par les applications g_i.

Revenons au produit $X := \prod_{i \in I} X_i$ d'une famille d'espaces topologiques $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ et rappelons que pour chaque $k \in I$ l'application k-ième projection $\pi_k : X \to X_k$ est définie par $\pi_k(x) = x_k$ pour tout $x = (x_i)_{i \in I}$ de $X := \prod_{i \in I} X_i$. Il n'est pas difficile (**Exer**) de vérifier que la topologie produit sur X est la topologie engendrée par les applications π_k pour $k \in I$, i.e. la plus petite topologie sur X rendant continues toutes les projections.

Ainsi on a le théorème suivant.

Théorème 3.7 *Soient $(E, \mathcal{O}_E)$ et $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ des espaces topologiques. Soit pour chaque $i \in I$ une application $g_i : E \to X_i$ et soit $g : E \to \prod_{i \in I} X_i$ avec $g(u) := (g_i(u))_{i \in I}$. Pour $\prod_{i \in I} X_i$ muni de la topologie produit, l'application g est $\mathcal{O}_E$-continue en un point $u_0 \in E$ si et seulement si pour chaque $i \in I$ l'application g_i est $(\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_i)$-continue en u_0.*

Démonstration. Il suffit d'observer que pour chaque $i \in I$ on a $g_i = \pi_i \circ g$. ■

Soient Y et T deux ensembles non vides. Si l'on pose $Y_t := Y$ pour chaque $t \in T$, alors $\prod_{t \in T} Y_t$ coincide avec l'espace de toutes les applications de T dans Y. On note souvent dans ce cas Y^T au lieu de $\prod_{t \in T} Y_t$. Supposons que Y soit muni d'une topologie τ_Y. En posant $\mathcal{O}_t := \tau_Y$ pour chaque $t \in T$, on peut considérer la topologie produit $\mathcal{O}$ sur $Y^T = \prod_{t \in T} Y_t$.

Considérons une suite généralisée $(f_j)_{j \in J}$ de $Y^T = \prod_{t \in T} Y_t$ et un élément $f \in Y^T = \prod_{t \in T} Y_t$. Tenant compte du dernier théorème ci-dessus, il n'est pas difficile de voir que cette suite généralisée converge vers f par rapport à la topologie produit $\mathcal{O}$ si et seulement si pour chaque $t \in T$ fixé la suite généralisée des images $(f_j(t))_{j \in J}$ converge vers $f(t)$ dans (Y, τ_Y). Ainsi la topologie $\mathcal{O}$ décrit la convergence simple (ou convergence ponctuelle) ("pointwise convergence" en anglais) des suites généralisées de fonctions de T dans Y. Cette topologie produit $\mathcal{O}$ est ainsi souvent appelée la **topologie de la convergence simple sur Y^T** ("pointwise convergence topology" en anglais).

4 Espace topologique normal

Nous allons nous intéresser, pour deux ensembles fermés disjoints A et B d'un espace topologique X, à l'existence d'au moins une fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ valant 0 sur A et 1 sur B.

Définition 4.1 (Espace topologique normal) *On dit qu'un espace topologique* **séparé Hausdorff** $(X, \mathcal{O})$ *est* **normal** *quand pour toute paire de* **fermés disjoints** A *et* B *il existe deux* **ouverts disjoints** U_A *et* U_B *tels que* $A \subset U_A$ *et* $B \subset U_B$.

Exemple. Tout espace métrique (X, d) est normal (pour la topologie associée à d). En effet, soient A et B deux fermés disjoints de X. Nous pouvons sans perte de généralité supposer qu'ils sont non vides. On montre aisément (**Exer**) que la fonction $d(\cdot, A)$ (avec $d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$) vérifie $|d(x, A) - d(x', A)| \leq d(x, x')$ pour tous $x, x' \in X$ et donc elle est continue. Ainsi les ensembles $U_A := \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ et $U_B := \{x \in X : d(x, B) < d(x, A)\}$ sont ouverts et disjoints, et ils contiennent A et B respectivement. ■

Pour deux **fermés disjoints** non vides d'un espace métrique (X, d) en posant

$$f(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \quad \text{pour tout } x \in X,$$

on voit aisément (**Exer**) que f est une fonction (à valeurs réelles) définie et continue sur X avec $f(x) = 0$ pour $x \in A$ et $f(x) = 1$ pour $x \in B$. L'existence d'une telle fonction n'est pas propre aux espaces métriques. C'est en fait une caractérisation des espaces topologiques normaux.

Théorème 4.2 (Théorème d'Urysohn séparant deux fermés disjoints par une fonction réelle continue). *Un espace topologique séparé (Haussdorff)* $(X, \mathcal{O})$ *est* **normal** *si et seulement si pour toute paire de* **fermés disjoints** A *et* B *non vides de* X *il existe une fonction continue de* X *dans* $\mathbb{R}$ *valant* 0 *sur* A*,* 1 *sur* B *et telle que* $0 \leq f(x) \leq 1$ *pour tout* $x \in X$.

Démonstration. Si la propriété du théorème a lieu, alors pour deux fermés disjoints A et B les ensembles $U_A := \{x \in X : f(x) < 1/2\}$ et $U_B := \{x \in X : f(x) > 1/2\}$ sont disjoints et contiennent A et B respectivement. De plus ils sont ouverts d'après la continuité de f. L'espace $(X, \mathcal{O})$ est donc normal.

Supposons maintenant que $(X, \mathcal{O})$ soit normal et fixons deux fermés disjoints non vides A et B de X. Soient $D_0 := \{0, 1\}$ et pour chaque entier $n \geq 1$ posons $D_n := \{p/2^n : 0 < p < 2^n \text{ et } p \notin 2\mathbb{N}\}$.

L'ensemble $D := \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ est l'ensemble des nombres dyadiques de $[0,1]$ et on sait qu'il est dense dans $[0,1]$. Nous allons définir par récurrence sur n une famille d'ensembles $(U_t)_{t\in D}$. Posons $U_1 := X\setminus B$ et choisissons, grâce à la normalité de $(X,\mathcal{O})$, un ouvert U_0 tel que $A \subset U_0 \subset \operatorname{adh} U_0 \subset X\setminus B$, i.e. $A \subset U_0 \subset \operatorname{adh} U_0 \subset U_1$. Pour $n = 1$ nous avons $D_1 = \{1/2\}$ et d'après la normalité de $(X,\mathcal{O})$ nous pouvons choisir un ouvert $U_{1/2}$ tel que $\operatorname{adh} U_0 \subset U_{1/2} \subset \operatorname{adh} U_{1/2} \subset U_1$. Soit $n \geq 2$ et supposons que des ouverts U_t aient été définis pour tous les $t \in \overset{n-1}{\underset{k=1}{\cup}} D_k$ de telle façon que pour tous s,t dans $\overset{n-1}{\underset{k=1}{\cup}} D_k$ vérifiant $s < t$ on ait $\operatorname{adh} U_0 \subset U_s \subset \operatorname{adh} U_s \subset U_t \subset \operatorname{adh} U_t \subset U_1$. Pour $t = \frac{p}{2^n} \in D_n$ (avec $p \notin 2\mathbb{N}$ et $0 < p < 2^n$), nous posons $t' := \frac{p-1}{2^n}$ et $t'' := \frac{p+1}{2^n}$, et nous notons que $U_{t'}$ et $U_{t''}$ sont déjà définis car $p-1$ et $p+1$ sont pairs. Nous utilisons à nouveau la normalité de l'espace X pour choisir un ouvert U_t tel que $\operatorname{adh} U_{t'} \subset U_t \subset \operatorname{adh} U_t \subset U_{t''}$. La famille $(U_t)_{t\in D}$ est donc construite et pour $s < t$ dans D nous avons $U_0 \subset \operatorname{adh} U_s \subset U_t \subset \operatorname{adh} U_t \subset U_1$. Posons $f(x) := 1$ pour tout $x \in B$ et posons $f(x) := \inf\{t \in D : x \in U_t\}$ pour tout $x \in X\setminus B$ (en observant que pour tout $x \in X\setminus B$ nous avons $x \in U_1$ et donc $\{t \in D : x \in U_t\} \neq \emptyset$). Pour tout $x \in A$ nous avons $x \in U_0$ et donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in A$. Il ne reste plus qu'à établir la continuté de f. Considérons deux réels quelconques $0 \leq \alpha < 1$ and $0 < \beta \leq 1$. Alors (puisque $f \geq \beta$ sur B) nous avons $f(x) < \beta$ si et seulement si $x \in X\setminus B$ et $\inf\{t \in D : x \in U_t\} < \beta$, et donc nous avons l'égalité $\overset{-1}{f}([0,\beta[) = (\underset{t\in D, t<\beta}{\cup} U_t) \cap (X\setminus B)$ qui nous dit que $\overset{-1}{f}([0,\beta[)$ est ouvert dans X. D'autre part pour $\alpha < 1$ nous avons $f(x) \leq \alpha$ si et seulement si (**Exer**) $x \in U_t$ pour tout $t \in D$ vérifiant $t > \alpha$ et donc

$$\overset{-1}{f}([0,\alpha]) = \underset{t\in D, t>\alpha}{\cap} U_t = \underset{t\in D, t>\alpha}{\cap} \operatorname{adh} U_t,$$

la seconde égalité découlant de l'inclusion $\operatorname{adh} U_s \subset U_t$ pour $s < t$. Ainsi pour $0 < \alpha < 1$ l'ensemble $\overset{-1}{f}([0,\alpha])$ est fermé dans X. Puisque les images des points de $X \setminus B$ et de B sont dans $[0,1]$, l'ensemble $\overset{-1}{f}(]\alpha,1])$ est le complémentaire dans X de $\overset{-1}{f}([0,\alpha])$, et donc il est ouvert dans X. La classe constituée des ensembles de la forme $[0,\beta[$ ou $]\alpha,1]$ (avec $0 \leq \alpha < 1$ et $0 < \beta \leq 1$) constituant une sous-base de la topologie induite de $[0,1]$, nous concluons que f est continue sur X. ■

Du théorème d'Uryshon on déduit le théorème d'extension de Tietze.

Théorème 4.3 (Théorème d'extension de Tietze). *Soit A un fermé non vide d'un espace topologique* **normal** *et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur A relativement à A et bornée sur A. Alors il existe au moins une fonction réelle continue et bornée $F : X \to \mathbb{R}$ telle que $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$ et $\sup\limits_{x\in X} |F(x)| = \sup\limits_{x\in A} |f(x)|$.*

Démonstration. Nous pouvons supposer que f n'est pas identiquement nulle sur A car sinon le résultat est trivial. Posons $f_0(x) := f(x)$ pour tout $x \in A$, $s_0 := \sup_{x\in A} |f_0(x)|$, $A_0 := \{x \in A : f_0(x) \leq -s_0/3\}$ et $B_0 := \{x \in A : f_0(x) \geq s_0/3\}$. Les ensembles A_0 et B_0 sont évidemment disjoints et ils sont fermés d'après la continuité de f_0 relativement à A_0. Le théorème précédent d'Uryshon nous fournit une fonction réelle continue g_0 sur X valant $-s_0/3$ sur A_0 et $s_0/3$ sur B_0 avec $-s_0/3 \leq g_0(x) \leq s_0/3$ pour tout $x \in X$, i.e. $\sup_{x\in X} |g_0(x)| \leq (1/3)s_0$. Soit $f_1 : A \to \mathbb{R}$ avec $f_1(x) := f_0(x) - g_0(x)$ pour tout $x \in A$. Cette fonction est évidemment continue relativement à A et on vérifie (**Exer**) que pour $s_1 := \sup_{x\in A} |f_1(x)|$ on a $s_1 \leq (2/3)s_0$.

En appliquant à f_1 et s_1 le processus appliqué précédemment à f_0 et s_0, et en continuant ainsi par récurrence on obtient une suite $(g_n)_n$ de fonctions réelles continues sur X telles que

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(x)| \leq (\frac{2}{3})^{n+1} s_0 \quad \text{pour tout } x \in A \tag{4.1}$$

et

$$\sup_{x \in X} |g_n(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n s_0. \tag{4.2}$$

L'inégalité (4.2) nous assure que la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur X et que sa fonction somme F est continue (**Exer**) sur X et vérifie $|F(x)| \leq s_0 = \sup_A |f|$ pour tout $x \in X$. Ainsi l'inégalité (4.1) entraîne que $f(x) = F(x)$ pour tout $x \in A$ et donc compte tenu de ce qui précéde $\sup_{x \in A} |F(x)| = \sup_{x \in A} |f(x)|$. Ceci termine la preuve. ■

Le corollaire suivant étudie le cas où la fonction réelle n'est pas nécessiarement bornée sur A.

Corollaire 4.4 *Si $(X, \mathcal{O})$ est un espace toplologique* **normal**, *alors toute fonction réelle continue sur un fermé de X peut être prolongée en une fonction réelle continue sur tout X.*

Démonstration. Soit A un sous-ensemble fermé non vide et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur A relativement à A. Posons $g(x) := \operatorname{Arctan}(f(x))$ pour tout $x \in A$. La fonction g étant bornée et continue sur le fermé A, on peut (d'après le théorème de Tietze ci-dessus) la prolonger en une fonction réelle continue G sur X vérifiant $-\prod/2 \leq G(x) \leq \prod/2$. Considérons le fermé $B := \{x \in X : |G(x)| = \prod/2\}$. Si B est vide, alors pour $F(x) := \tan(G(x))$ pour tout $x \in X$ la fonction F est bien définie de X dans $\mathbb{R}$, elle est un prolongement de f et elle est continue sur X.

Supposons donc $B \neq \emptyset$. Puisque pour tout $x \in A$ nous avons $|G(x)| = |\operatorname{Arctan}(f(x))| < \prod/2$, nous déduisons que $A \cap B = \emptyset$. Le théorème d'Urysohn nous fournit alors une fonction continue $\varphi : X \to [0, 1]$ valant 1 sur A et 0 sur B. Pour tout $x \in X$ on a alors $\varphi(x)G(x) \in]-\prod/2, \prod/2[$ et donc $F(x) := \tan(\varphi(x)G(x))$ est bien définie dans $\mathbb{R}$. De plus la fonction F est à valeurs réelles et continue sur X et elle est un prolongement de f sur X. ■

5 Compacité

Un des plus importants concepts dans la théorie des espaces topologiques est celui d'ensemble compact. Rappelons qu'une classe $\mathcal{U}$ de parties d'un ensemble X est un *recouvrement* d'un sous-ensemble A de X quand $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Quand $\operatorname{card}\mathcal{U}$ est fini, on dit que c'est un *recouvrement fini* de A. Si X est muni d'une topologie et si chaque $U \in \mathcal{U}$ est ouvert, alors le recouvrement $\mathcal{U}$ de A est dit être un *recouvrement ouvert* de A ou *recouvrement de A par des ouverts.*

Une sous-classe $\mathcal{S}$ de $\mathcal{U}$ (i.e. $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$) qui est aussi un recouvrement de A est appelé un sous-recouvrement.

Définition 5.1 (Ensemble compact) *Un sous-ensemble A d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit être* **compact** *dans $(X, \mathcal{O})$ quand de tout* **recouvrement ouvert** *de A on peut extraire un* **sous-recouvrement fini**. *Quand X lui-même est compact, on dit que $(X, \mathcal{O})$ est un espace topologique compact.*

Exemples.
(a) L'ensemble vide et tous les **sous-ensembles finis** de X sont compacts dans X.

(b) Un sous-ensemble non vide A est compact dans $(X, \mathcal{O})$ si et seulement si (**Exer**) pour la topologie induite τ par $\mathcal{O}$ sur A, l'espace topologique (A, τ) est compact.
(c) Soient un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ et deux sous-ensembles A et Y de X avec $A \subset Y$ et $Y \neq \emptyset$. Notons $\mathcal{O}_Y$ la topologie induite sur Y par la topologie $\mathcal{O}$. Alors (**Exerc**) A **est compact dans** $(Y, \mathcal{O}_Y)$ **si et seulement si** A **est compact dans** $(X, \mathcal{O})$.
(d) Nous savons que les intervalles **fermés et bornés** de $\mathbb{R}$ sont compacts dans $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (voir le Cours de L3). Néanmoins $\mathbb{R}$ n'est pas compact pour sa topologie usuelle. Par contre $\overline{\mathbb{R}}$ est compact pour sa topologie naturelle (**Exer**).
(e) Pour toute **suite** (ordinaire) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(X, \mathcal{O})$ convergeant vers un point a de X, l'ensemble $A := \{a\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est compact dans $(X, \mathcal{O})$ (**Exer**).
(f) L'assertion de l'exemple (e) **n'a pas lieu avec les suites généralisées**. En effet pour $T :=]-\infty, 0[$ muni de l'ordre naturel $\leq$ (qui est filtrant croissant) et pour $x_t := t$ pour chaque $t \in T$ la suite généralisée $(x_t)_{t \in T}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$ mais l'ensemble $]-\infty, 0] = \{0\} \cup \{x_t : t \in T\}$ n'est pas compact dans $\mathbb{R}$. ■

Par complémentarité, on déduit directement de la définition 5.1 une caractérisation de la compacité à l'aide de fermés.

Proposition 5.2 *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est compact si et seulement si pour toute famille $\mathcal{F}$ de fermés de X dont* **l'intersection de toute sous-famille finie est non vide** *on a $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.*

La proposition suivante établit quelques premières propriétés des ensembles compacts.

Proposition 5.3 *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Tout ensemble fermé de X inclus dans un compact de X est compact dans $(X, \mathcal{O})$.
(b) La réunion d'un **nombre fini** *de compacts de X est un compact de X.*
(c) L'image de tout compact de X par une application continue de X dans un espace topologique Y est un ensemble compact dans Y.
(d) Si A est compact dans $(X, \mathcal{O})$, alors A est compact dans $(X, \mathcal{O}')$ pour toute topologie $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.
(e) Si l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est **séparé**, *alors tout compact de X est fermé dans $(X, \mathcal{O})$.*
(f) S'il existe une distance d sur X pour laquelle $\mathcal{O}$ coincide avec la topologie associée à cette distance d, alors tout compact A de X est d-borné, i.e. il existe un point $a \in X$ et un réel $r > 0$ tel que $A \subset B_d(a, r)$.
(g) Si A est **compact** *dans X, alors toute fonction* **à valeurs réelles** *définie et* **continue sur** A **relativement à** A *est bornée sur A et atteint ses bornes supérieure et inférieure sur A.*

Démonstration. (a) Soit A un ensemble compact de X et F un fermé de X inclus dans A. Considérons un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de F. Alors la famille formée de $X \setminus F$ et des ensembles appartenant à $\mathcal{U}$ constitue un recouvrement ouvert de A et donc par compacité de A il existe un entier $m \geq 1$ et des ouverts $U_1, \cdots, U_m$ appartenant à $\mathcal{U}$ tels que

$$A \subset U_1 \cup \cdots \cup U_m \cup (X \setminus F).$$

On en déduit, puisque $F \subset A$, que $F \subset U_1 \cup \cdots \cup U_m$, et donc F est compact dans X.
(b), (c) et (d) **Exercice.**
(e) Soit A un compact de X. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que A et $X \setminus A$ sont non vides. Fixons un élément quelconque $y \in X \setminus A$. Pour chaque $x \in A$, d'aprés l'hypothèse de séparation de Hausdorff, il existe deux ouverts disjoints U_x et V_x tels que $x \in U_x$ et $y \in V_x$. La famille $(U_x)_{x \in A}$ est un recouvrement ouvert de A et donc par compacité de A, il existe un entier

$m \geq 1$ et des points $x_1, \cdots, x_m \in A$ tels que $A \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}$. L'ouvert $V := \overset{m}{\cap}_{i=1} V_{x_i}$ vérifie $y \in V \subset X \setminus A$, et donc $X \setminus A$ est ouvert en tant que voisinage de chacun de ses points. Par conséquent l'ensemble A est fermé dans X.
(f) Supposons que A soit compact dans X et fixons $a \in X$. Comme $\bigcup_{\rho \in]0,+\infty[} B_d(a,\rho) = X$, nous avons $A \subset \bigcup_{\rho \in]0,+\infty[} B_d(a,\rho)$ et donc par compacité de A il existe un entier $m \geq 1$ et des réels strictement positifs $\rho_1, \cdots, \rho_m$ tels que $A \subset \overset{m}{\underset{i=1}{\cup}} B_d(a,\rho_i)$. Pour le réel strictement positif $r := \max\limits_{1 \leq i \leq m} \rho_i$ nous avons $A \subset B_d(a,r)$ et donc A est d-borné.
(g) Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur A relativement à A. L'espace topologique (A,τ) étant compact par hypothèse (τ désignant la topologie induite sur A) et la restriction $f_{|A}$ de f à A étant τ-continue, l'ensemble $f_{|A}(A) = f(A)$ est compact dans $\mathbb{R}$ d'après (c). Il découle alors de (e) et (f) que l'ensemble $f(A)$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}$ et donc ses bornes supérieure et inférieure existent dans $\mathbb{R}$ et appartiennent à $f(A)$. ■

La proposition suivante fournit un critère d'homéomorphisme intéressant. On dit qu'une application f d'un espace topologique $(X,\mathcal{O}_X)$ dans un espace topologique $(Y,\mathcal{O}_Y)$ est un **homéomorphisme** si elle est **bijective et bicontinue** (i.e. elle et son application réciproque sont continues).

Proposition 5.4 *Toute* **bijection continue** *d'un espace topologique* **compact** *dans un espace toplogique* **séparé** *(Hausdorff) est un* **homéomorphisme***.*

Démonstration. Exercice. ■

Nous établissons maintenant une caractérisation de compacts d'un espace topologique $(X,\mathcal{O})$ à partir d'une sous-base de la topologie $\mathcal{O}$.

Théorème 5.5 (Théorème d'Alexander caractérisant la compacité à partir de sous-base). *Soient $(X,\mathcal{O})$ un espace topologique et $\mathcal{S}$ une sous-base de la topologie $\mathcal{O}$. Alors un sous-ensemble A de X est compact dans X si et seulement si de tout recouvrement de A par une famille d'ensembles appartenant à $\mathcal{S}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Démonstration. L'implication $\Rightarrow$ est évidente. Supposons que la propriété ci-dessus relative à la sous-base $\mathcal{S}$ ait lieu. Considérons l'ensemble $\mathfrak{R}$ de tous les recouvrements ouverts de A sans sous-recouvrement fini et munissons $\mathfrak{R}$ de l'ordre $\subset$. Pour toute chaine $\mathfrak{C}$ non vide de $(\mathfrak{R},\subset)$ (i.e. sous-ensemble totalement ordonné non vide de $(\mathfrak{R},\subset)$) la classe $\bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}} \mathcal{C}$ appartient évidemment à $\mathfrak{R}$ et donc est un majorant de $\mathfrak{C}$ dans $(\mathfrak{R},\subset)$. D'après le lemme de Zorn, $(\mathfrak{R},\subset)$ contient un élément maximal $\mathcal{V}$, i.e. $\mathcal{V}$ est un recouvrement ouvert de A et pour tout ouvert $U \notin \mathcal{V}$ la classe $\mathcal{V} \cup \{U\}$ admet un sous-recouvrement fini de A. Puisque $\mathcal{V} \in \mathfrak{R}$, aucune sous-classe finie de la classe $\mathcal{W} := \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$ ne recouvre A et donc, d'après la propriété relative à $\mathcal{S}$, la classe $\mathcal{W}$ ne recouvre pas A. Ceci entraîne qu'il existe un point $a \in A \setminus (\bigcup_{W \in \mathcal{W}} W)$. Choisissons un ensemble $V \in \mathcal{V}$ tel que $a \in V$. Puisque $\mathcal{S}$ est une sous-base de la topologie $\mathcal{O}$, il existe un entier $m \geq 1$ et des ensembles $S_1, \cdots, S_m$ appartenant à $\mathcal{S}$ tels que $a \in \overset{m}{\underset{i=1}{\cap}} S_i \subset V$. Comme $a \in A \setminus (\bigcup_{W \in \mathcal{W}} W)$, pour chaque $i = 1, \cdots, m$ nous avons $S_i \notin \mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$ et donc $S_i \notin \mathcal{V}$ (puisque $S_i \in \mathcal{S}$). Par maximalité de $\mathcal{V}$ dans $(\mathfrak{R},\subset)$, il existe pour chaque $i = 1, \cdots, m$ un entier $n_i \geq 1$ et des ensembles $V_{i,1}, \cdots, V_{i,n_i}$ de $\mathcal{V}$ tels que $A \subset S_i \cup V_{i,1} \cup \cdots \cup V_{i,n_i}$. Par conséquent

$$V \bigcup \big(\overset{m}{\underset{i=1}{\cup}} \overset{n_i}{\underset{j=1}{\cup}} V_{i,j}\big) \supset \big(\overset{m}{\underset{k=1}{\cap}} S_k\big) \bigcup \big(\overset{m}{\underset{i=1}{\cup}} \overset{n_i}{\underset{j=1}{\cup}} V_{i,j}\big) \supset A,$$

et donc A est contenu dans l'union d'un nombre fini d'ensembles appartenant à $\mathcal{V}$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{V} \in \mathfrak{R}$. La démonstration du théorème est donc terminée. $\blacksquare$

Le théorème d'Alexander ci-dessus va nous permettre de démontrer le théorème de Tychonoff suivant.

Théorème 5.6 (Théorème de Tychonoff relatif à la compacité dans un espace produit). *Soit $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille* **(quelconque)** *d'espaces topologiques et soit $\mathcal{O}$ la topologie produit sur $\prod_{i\in I} X_i$ des topologies $\mathcal{O}_i$.*
(a) Si A_i est un ensemble compact dans $(X_i, \mathcal{O}_i)$ pour cahque $i \in I$, alors l'ensemble $\prod_{i\in I} A_i$ est $\mathcal{O}$-compact dans $\prod_{i\in I} X_i$.
(b) En particulier, le produit cartésien $\prod_{i\in I} X_i$ est compact pour la topologie produit si et seulement si chaque espace $(X_i, \mathcal{O}_i)$ est compact.

Démonstration. (a) Quitte à considérer la topologie induite sur A_i, nous pouvons supposer que $A_i = X_i$ pour chaque $i \in I$. Nous savons que la classe $\mathcal{S}$ formée par les $\overset{-1}{\pi_i}(U_i)$ avec $i \in I$ et $U_i \in \mathcal{O}_i$ est une sous-base de la topologie produit $\mathcal{O}$ de $X := \prod_{i\in I} X_i$. Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ un recouvrement de $\prod_{i\in I} X_i$. Considérons pour chaque $i \in I$, la classe $\mathcal{U}_i$ des ouverts U de X_i tels que $\overset{-1}{\pi_i}(U) \in \mathcal{U}$. Nous affirmons qu'il existe un $i_0 \in I$ tel que $\bigcup_{U\in\mathcal{U}_{i_0}} U = X_{i_0}$. Si ce n'était pas le cas, il existerait un point $a := (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ tel que pour tout $i \in I$ on aurait $a_i \in X_i \setminus (\bigcup_{U\in\mathcal{U}_i} U)$ et donc $a \notin \overset{-1}{\prod_i}(U)$ pour chaque $\overset{-1}{\prod_i}(U) \in \mathcal{U}$. Ceci traduirait que $\mathcal{U}$ n'est pas un recouvrement de X et contredirait notre hypothèse sur $\mathcal{U}$.

Comme $\bigcup_{U\in\mathcal{U}_{i_0}} U = X_{i_0}$, la compacité de X_{i_0} nous assure l'existence d'un entier $m \geq 1$ et d'ensembles $U_1, \cdots, U_m$ appartenant à $\mathcal{U}_{i_0}$ tels que $X_{i_0} = U_1 \cup \cdots \cup U_m$. Ainsi

$$X = \overset{-1}{\pi_{i_0}}(U_1) \cup \cdots \cup \overset{-1}{\pi_{i_0}}(U_m),$$

et donc X est compact d'après le théorème d'Alexander ci-dessus.
(b) L'implication $\Leftarrow$ décolue directement de (a). Pour l'implication inverse $\Rightarrow$ il suffit pour chaque $i \in I$ d'utiliser la continuité de la projection $\pi_i : X \to X_i$. $\blacksquare$

Le théorème de Tychonoff nous permet de caractériser les sous-ensembles compacts pour la topologie de la convergence simple.

Corollaire 5.7 *(***Compacité relativement à la topologie de la convergence simple).** *Soient T un ensemble non vide et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ un espace topologique. Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Dans Y^T un sous ensemble $\mathcal{K}$ **fermé** *pour la toplogie de la convergence simple est compact pour la topologie de la convergence simple si et seulement si pour chaque $t \in T$ l'ensemble $\{f(t) : f \in \mathcal{K}\}$ est compact dans $(Y, \mathcal{O}_Y)$.*
(b) Un sous-ensemble $\mathcal{K}$ de Y^T est d'adhérence compacte pour la topologie de la convergence simple si et seulement si pour chaque $t \in T$ l'ensemble $\{f(t) : f \in \mathcal{K}\}$ est contenu dans un compact de $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Démonstration. Notons $\mathcal{O}$ la topologie de la convergence simple sur Y^T, i.e. la topologie produit sur $Y^T = \prod_{t\in T} Y_t$, où $Y_t := Y$ pour tout $t \in T$.

Si $\mathcal{K}$ est compact dans Y^T, alors pour chaque $t \in T$ la continuité de la t-ième projection π_t nous assure que l'ensemble $\pi_t(\mathcal{K}) = \{f(t) : f \in \mathcal{K}\}$ est compact dans Y.

Supposons maintenant que pour chaque $t \in T$ l'ensemble $K_t := \{f(t) : f \in \mathcal{K}\}$ soit compact dans $Y_t = Y$. D'après le théorème de Tychonoff, l'ensemble $\prod_{t \in T} K_t$ est compact dans Y^T. Par conséquent le fermé $\mathcal{K}$ étant inclus dans $\prod_{t \in T} K_t$, nous déduisons qu'il est compact dans Y^T (voir (a) de la proposition 5.3). Ceci établit (a) et termine la démonstration car (b) découle directement de (a). ■

Un autre corollaire est le suivant.

Corollaire 5.8 *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$ est compact si et seulement s'il fermé et borné.*

Démonstration. Exercice. ■

Introduisons maintenant le concept d'élément d'adhérence d'une suite généralisée.

Définition 5.9 (Élement d'adhérence d'une suite généralisée.*) Soit $(x_j)_{j \in J}$ une suite généralisée d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$. On dit qu'un point $a \in X$ est un* **élément d'adhérence de cette suite généralisée** *("cluster point" en anglais) quand*

$$a \in \bigcap_{j \in J} \operatorname{adh}(\{x_k : k \in J, j \preceq k\}).$$

*Ceci revient à dire (***Exer***) que pour tout voisnage V de a dans X et tout $j_0 \in J$ il existe un $j \in J$ avec $j_0 \preceq j$ et tel que $x_j \in V$. (Quand $X = \mathbb{R}$, on dit aussi* **valeur d'adhérence** *au lieu d'élément d'adhérence).*

D'après ce qui précède l'ensemble des éléments d'adhérence de la suite généralisée $(x_j)_{j \in J}$ est égal à

$$\bigcap_{j \in J} \operatorname{adh}(\{x_k : k \in J, j \preceq k\}).$$

Exemples.
(a) Pour $x_n := n$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas d'éléments d'adhérence dans $\mathbb{R}$.
(b) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$ et soit $x_n := \varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des éléments d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ (**Exer**).
(c) Si une suite généralisée $(x_j)_{j \in J}$ de $(X, \mathcal{O})$ converge vers un point $a \in X$, alors a est un élément d'adhérence de la suite généralisée.
(d) Si l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est **séparé (Hausdorff)** et si une suite généralisée $(x_j)_{j \in J}$ de $(X, \mathcal{O})$ converge vers un point $a \in X$, alors a est un élément d'adhérence de la suite généralisée et c'est le seul.
(e) Une suite généralisée d'un espace topologique (même séparé (Hausdorff)) peut admettre un seul élément d'adhérence sans converger vers cet élément. Dans $\mathbb{R}$ considérons $x_{2n} := n$ et $x_{2n+1} := \sqrt{2}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $\sqrt{2}$ comme seul élément d'adhérence dans $\mathbb{R}$ mais elle ne converge pas vers $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$. ■

Nous allons caractériser les éléments d'adhérence d'une suite généralisée à l'aide de sous-suite généralisée. Auparavant disons qu'une application s d'un ensemble préordonné filtrant croissant $(I, \preceq_I)$ dans un ensemble préordonné filtrant croissant $(J, \preceq_J)$ est une **application filtrante croissante** si pour chaque $j_0 \in J$ il existe un $i_0 \in I$ tel que pour tout $i \in I$ vérifiant $i_0 \preceq_I i$ on ait $j_0 \preceq_J s(i)$.

Définition 5.10 *Soit $(J, \preceq_J)$ un ensemble péordonné filtrant croissant et $(x_j)_{j \in J}$ une suite généralisée d'un ensemble X. Une suite généralisée $(y_i)_{i \in I}$ (avec $(I, \preceq_I)$ préordonné filtrant croissant) est dite être une* **sous-suite généralisée** *de $(x_j)_{j \in J}$ s'il existe une* **application filtrante croissante** *$s : I \to J$ telle $y_i = x_{s(i)}$ pour tout $i \in I$.*

Proposition 5.11 *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique.*
(a) Un point a de cet espace topologique est un élément d'adhérence d'une suite généralisée $(x_j)_{j\in J}$ de cet espace si et seulement si $(x_j)_{j\in J}$ admet une sous-suite généralisée qui converge vers a dans X.
(b) Supposons que tout point de $(X, \mathcal{O})$ ait une **base dénombrable de voisinages**. *Alors un point $a \in X$ est un élément d'adhérence* **d'une suite ordinaire** *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X si et seulement s'il existe une sous-suite ordinaire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a dans X.*

Démonstration. (a) L'implication $\Leftarrow$ est facile (**Exer**). Supposons maintenant que a soit un élément d'adhérence de la suite généralisée $(x_j)_{j\in J}$ (le préordre filtrant croissant de J étant noté $\preceq_J$). Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des voisinages de a dans X et considérons l'ensemble non vide $\Lambda := \{(j, V) : x_j \in V\}$ muni du préordre $\preceq$ défini par $(j_1, V_1) \preceq (j_2, V_2)$ si $j_1 \preceq_J j_2$ et $V_1 \supset V_2$. On vérifie (**Exer**) que ce préordre sur Λ est filtrant croissant et que l'application $s : \Lambda \to J$ définie pour tout $(j, V) \in \Lambda$ par $s(j, V) := j$ est filtrante croissante. Par conséquent $(x_{s(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ est une sous-suite généralisée de $(x_j)_{j\in J}$. Il ne reste qu'à montrer que $(x_{s(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers a dans X. Soit donc un voisinage W quelconque de a dans X. D'après la définition d'élément d'adhérence, nous pouvons choisir un $j_W \in J$ tel que $x_{j_W} \in W$, et donc $\lambda_0 := (j_W, W) \in \Lambda$. Soit $\lambda \in \Lambda$ quelconque vérifiant $\lambda_0 \preceq \lambda$. Choisissons par définition de Λ un $j \in J$ et un $V \in \mathcal{V}$ tel que $x_j \in V$ et $\lambda = (j, V)$. Comme $\lambda_0 \preceq \lambda$ nous avons $W \supset V$ et donc $x_{s(\lambda)} = x_j \in V \subset W$. Ainsi pour tout $\lambda \in \Lambda$ avec $\lambda_0 \preceq \lambda$ nous avons $x_{s(\lambda)} \in W$. Ceci signifie que la sous-suite généralisée $(x_{s(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers a dans X, ce qui termine la démonstration de l'assertion (a).
(b) La démonstration de (b) est laissée comme **exercice**. ■

Nous pouvons caractériser les compacts à l'aide des deux concepts ci-dessus.

Théorème 5.12 (Caractérisation de compacts à l'aide de sous-suites généralisées) *Soit A un sous-ensemble non vide d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$. Alors les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :*
(a) L'ensemble A est compact dans X ;
(b) Toute suite généralisée de A admet au moins un élément d'adhérence dans A ;
(c) De toute suite généralisée de A on peut extraire une sous-suite **généralisée** *convergeant vers un point de A.*

Démonstration. La proposition ci-dessus nous assure que les assertions (b) et (c) sont équivalentes. Supposons maintenant que A soit compact dans X et notons $\mathcal{O}'$ la tologie induite sur A par $\mathcal{O}$. Soit $(x_j)_{j\in J}$ une suite généralisée de A. La famille $(\mathrm{adh}_{\mathcal{O}'}(\{x_k : k \in J,\ j \preceq k\}))_{j\in J}$ est une famille de fermés de $(A, \mathcal{O}')$ dont toute sous-famille finie a évidemment une intersection non vide (**le vérifier**). Par compacité de A on a $\bigcap\limits_{j\in J} \mathrm{adh}_{\mathcal{O}'}(\{x_k : k \in J, j \preceq k\}) \neq \emptyset$ et donc $(x_j)_{j\in J}$ admet au moins un élément d'adhérence dans A.

Inversement, supposons que (b) soit vraie. Soit $\mathcal{F}$ une famille de fermés de $(A, \mathcal{O}')$ dont l'intersection de toute sous-famille finie soit non vide. Notons $\mathcal{H}$ la famille de toutes les intersections finies d'ensembles appartenant à $\mathcal{F}$. L'intersection de toute sous-famille finie de $\mathcal{H}$ est évidemment non vide et l'ensemble ordonné $(\mathcal{H}, \supset)$ est filtrant croissant. Choisissons pour chaque $H \in \mathcal{H}$ un élément $x_H \in H$. Par hypothèse, la suite généralisée $(x_H)_{H\in\mathcal{H}}$ de A admet un élément d'adhérence a dans A. D'autre part, pour tout $H \in \mathcal{H}$ nous avons $\{x_G : G \in \mathcal{H},\ H \supset G\} \subset H$ et donc $a \in \mathrm{adh}_{\mathcal{O}'} H = H$ (l'égalité découlant du fait que H soit fermé dans $(A, \mathcal{O}')$). Par conséquent $a \in \bigcap_{H\in\mathcal{H}} H \subset \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$ et donc la dernière intersection est non vide. Ceci signifie que $(A, \mathcal{O}')$ est compact, i.e. l'ensemble A est compact dans $(X, \mathcal{O})$. ■

Considérons maintenant le résultat suivant de normalité de tout espace topologique compact et séparé (Hausdorff).

Proposition 5.13 *Tout espace topologique compact et séparé (Hausdorff)* $(X, \mathcal{O})$ *est normal, i.e. pour toute paire de fermés disjoints* A *et* B *de* X*, il existe deux ouverts disjoints contenant* A *et* B *respectivement.*

Démonstration. Exercice. Commencer par le cas où A est un singleton et B est un fermé avec $A \cap B = \emptyset$. ■

La définition suivante considère les espaces contenant suffisamment de voisinages compacts.

Définition 5.14 *On dit qu'un espace topologique* $(X, \mathcal{O})$ *est localement compact quand tout point de* X *admet un système fondamental de voisinages compacts.*

Exemples.
(a) Pour tout ensemble non vide X l'espace $(X, \mathcal{P}(X))$ est localement compact (mais non compact quand X est infini).
(b) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^p$ sont **localement compacts** pour leurs topologies naturelles (mais non compacts).
(c) Si $(X, \mathcal{O})$ est locament compact et si U est un ouvert non vide de X, alors pour la topologie induite $\mathcal{O}_U$ par $\mathcal{O}$ sur U, l'espace topologique $(U, \mathcal{O}_U)$ est localement compact.
(d) Si $(X, \mathcal{O})$ est localement compact et séparé (Hausdorff) et si F est un fermé non vide de X, alors pour la topologie induite $\mathcal{O}_F$ par $\mathcal{O}$ sur F, l'espace topologique $(F, \mathcal{O}_F)$ est localement compact. ■

Proposition 5.15 *Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Un espace topologique **séparé (Hausdorff)** *est localement compact si et seulement si tout point admet un voisinage compact.*
(b) Tout espace compact **séparé (Hausdorff)** *est localement compact.*

Démonstration. L'asertion (b) est une conséquence directe de (a).

L'implication $\Rightarrow$ de (a) étant évidente, montrons l'implication inverse. Soit $a \in X$ fixé quelconque. Par hypothèse il existe un voisinage compact V de a dans $(X, \mathcal{O})$ et donc en particulier V est fermé dans l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$, puisque ce dernier est séparé (Hausdorff). Soit W un ouvert quelconque de $(X, \mathcal{O})$ avec $a \in W$. Notons $\mathcal{O}_V$ la topologie induite sur V par $\mathcal{O}$. Comme $\{a\}$ et $F := V \setminus W$ sont deux fermés disjoints de l'espace topologique compact séparé (Hausdorff) $(V, \mathcal{O}_V)$, d'après la proposition 5.13 ci-dessus il existe deux $\mathcal{O}_V$-ouverts disjoints W_a et W_F dans V contenant a et F respectivement. Ainsi $W_a \subset V \setminus W_F$ et donc

$$V_a := \mathrm{adh}_{\mathcal{O}_V}(W_a) \subset V \setminus W_F \subset W,$$

la première inclusion provenant du fait que $V \setminus W_F$ est $\mathcal{O}_V$-fermé et la seconde inclusion étant due à la relation $V \setminus W \subset W_F$ ci-dessus. Comme V_a est $\mathcal{O}_V$-fermé dans l'espace compact $(V, \mathcal{O}_V)$, il est $\mathcal{O}_V$-compact et donc aussi $\mathcal{O}$-compact. En conclusion, V_a est un voisinage compact de a dans $(X, \mathcal{O})$ vérifiant $V_a \subset W$, ce qui nous dit que $(X, \mathcal{O})$ est localement compact. ■

6 Compacité dans les espaces métriques

Une première particularité de la compacité d'un espace métrique est qu'elle entraîne que cet espace est séparable.

Proposition 6.1 *Soit A un sous-ensemble non vide* **compact d'un espace métrique** (X, d). *Alors A muni de la topologie induite est un* **espace séparable**.

Démonstration. Exercice. ■

Plusieurs autres propriétés et plusieurs caractérisations fondamentales de sous-ensembles compacts d'espaces métriques ont été étudiées en L3. L'une de ces caractérisations fondamentales fait appel à la notion de sous-ensemble complet qui est rattachée à la propriété de Cauchy suivante.

Définition 6.2 *On dit qu'une suite généralisée $(x_j)_{j\in J}$ d'un espace métrique (X, d) est une* **suite généralisée de Cauchy** *quand pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un $j_0 \in J$ (dépendant de ε) tel que pour tous $j_1, j_2 \in J$ vérifiant $j_0 \preceq j_1$ et $j_0 \preceq j_2$ on a $d(x_{j_1}, x_{j_2}) < \varepsilon$.*

Exemples.
(a) Toute suite généralisée convergente d'un espace métrique est une suite généralisée de Cauchy.
(b) Si une suite généralisée de Cauchy d'un espace métrique possède un élément d'adhérence, alors elle converge vers cet élément (**Exer**). ■

Définition 6.3 *On dit qu'un sous-ensemble non vide A d'un espace métrique (X, d) est* **complet** *(ou d-complet) quand toute suite généralisée de points de A converge vers un point de A. Quand l'ensemble lui-même est complet, on dit que (X, d) est un espace métrique complet.*

Montrons qu'en fait le caractère complet d'un ensemble dans un espace métrique peut être caractérisé avec des suites (ordinaires) uniquement.

Proposition 6.4 *Un sous-ensemble non vide A d'un* **espace métrique** (X, d) *est complet si et seulement si toute suite (ordinaire) de Cauchy de points de A converge vers un point de A.*

Démonstration. L'implication $\Rightarrow$ est évidente. Supposons maintenant que la propriété de convergence ait lieu pour toute suite (ordinaire) de Cauchy de A. Soit $(x_j)_{j\in J}$ une suite généralisée de Cauchy de points de A. De la définition de suite généralisée de Cauchy on déduit (**Exer**) une application α de $\mathbb{N}$ dans J telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on ait $\alpha(n) \preceq \alpha(n+1)$ et

$$d(x_j, x_{j'}) < \frac{1}{n+1} \quad \text{pour tous } j, j' \in J \text{ avec } \alpha(n) \preceq j \text{ et } \alpha(n) \preceq j'. \tag{6.1}$$

Pour tous entiers $p, q \geq n$ nous avons $\alpha(n) \preceq \alpha(p)$ et $\alpha(n) \preceq \alpha(q)$ et donc d'après (6.1) nous avons $d(x_{\alpha(p)}, x_{\alpha(q)}) < \frac{1}{n+1}$, ce qui entraîne (**Exer**) que la suite $(x_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de A est de Cauchy. D'après notre hypothèse, cette suite $(x_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $a \in A$. Fixons maintenant un réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Choisissons un entier n_0 tel que $1/(n_0 + 1) < \varepsilon/2$ et $d(x_{\alpha(n_0)}, a) < \varepsilon/2$. Alors d'après (6.1) à nouveau nous obtenons pour tout $j \in J$ vérifiant $\alpha(n_0) \preceq j$ que

$$d(x_j, a) \leq d(x_j, x_{\alpha(n_0)}) + d(x_{\alpha(n_0)}, a) < \varepsilon,$$

et donc nous concluons que la suite généralisée $(x_j)_{j\in J}$ converge vers $a \in A$. ■

La proposition suivante fournit quelques propriétés relatives aux ensembles complets.

Proposition 6.5 *Soit (X, d) un espace métrique. Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Tout sous-ensemble complet de (X, d) est fermé dans X.
(c) Tout sous-ensemble compact de (X, d) est complet.
(c) Si (X, d) est complet, alors tout sous-ensemble fermé de X est complet.

Démonstration. Exercice. ■

Une autre propriété remarquable des ensembles complets est la suivante.

Proposition 6.6 *Soit* (X,d) *un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(a) L'espace (X,d) *est complet ;*
(b) Pour toute suite généralisée décroissante $(F_j)_{j\in J}$ *(i.e.* $F_{j'} \subset F_j$ *pour* $j \preceq j'$*) de fermés non vides de* X *tels que* $\operatorname{diam} F_j \xrightarrow[j\in J]{} 0$*, il existe un point* $a \in X$ *tel que* $\bigcap_{j\in J} F_j = \{a\}$*.*
(c) Pour toute suite décroissante $(F_n)_{jn\in\mathbb{N}}$ *de fermés non vides de* X *tels que* $\operatorname{diam} F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$*, il existe un point* $a \in X$ *tel que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_j = \{a\}$*.*

Démonstration. Exercice. ■

Le transport des suite généralisées de Cauchy se fait à l'aide d'applications uniformément continues. Rappelons qu'une application f d'un espace métrique (X,d_X) dans un espace métrique (Y,d_Y) est **uniformément continue** sur X quand pour tout réel $\varepsilon >$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tous $x, x' \in X$ vérifiant $d_X(x,x') < \eta$ on a $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Evidemment, pour toute suite généralisée de Cauchy $(x_j)_{j\in J}$ de (X,d_X) la suite généralisée des images $(f(x_j))_{j\in J}$ est de Cauchy dans (Y,d_Y).

Proposition 6.7 *Toute* **application continue** *d'un espace* **métrique compact** (X,d_X) *dans un espace métrique* (Y,d_Y) *est* **uniformément continue***.*

Démonstration. Exercice. ■

Enonçons aussi le principle suivant d'extension d'application uniformément continue.

Proposition 6.8 *Soient* D *un sous-ensemble* **dense** *d'un espace métrique* (X,d_X) *et* $f : D \to Y$ *une application* **uniformément continue** *de* D *dans un espace* **métrique complet** (Y,d_Y)*. Alors* f *admet une extension uniformément continue de* X *dans* Y *et une seule.*

démonstration. Exercice. ■

En vue d'énoncer les caractérisations ci-dessous de compacité dans un espace métrique, rappelons la définition suivante.

Définition 6.9 *Un sous-ensemble* A *d'un espace métrique* (X,d) *est dit être* **précompact** *("totally bounded" en anglais) quand pour tout réel* $\varepsilon > 0$ *on peut recouvrir* A *par un* **nombre fini** *de boules ouvertes* **centrées en des points de** A *et de rayon* ε*.*

Evidemment tout ensemble compact d'un espace métrique est précompact. Le théorème suivant est remarquable d'une part à cause d'une certaine réciproque de cette propriété, et d'autre part à cause de la caractérisation de la compacité dans un espace métrique à l'aide des suites (au lieu de suites généralisées).

Théorème 6.10 (Caractérisations de compacts d'un espace métrique). *Soit* A *un sous-ensemble d'un espace métrique* (X,d)*. Les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes.*
(a) L'ensemble A *est compact dans* X *;*
(b) De toute suite de points de A *on peut extraire une sous-suite convergeant vers un point de* A *(i.e.* A *est* **séquentiellement compact***) ;*
(c) L'ensemble A *est* **précompact et complet** *dans* (X,d)*.*

Démonstration. Voir le Cours de L3. ■

7 Théorème d'Arzelà-Ascoli

Nous avons caractérisé à l'aide du théorème de Tychonoff la compacité d'un ensemble d'applications pour la topologie de la convergence simple. Nous allons dans cette section caractériser les ensembles (d'applications) qui sont compacts pour la topologie de la convergence uniforme.

Disons qu'une application f d'un ensemble T dans un espace métrique (Y, d_Y) est bornée quand l'ensemble image $f(X)$ est borné dans (Y, d_Y). Notons $\mathcal{B}(T, Y)$ l'ensemble des applications bornées de T dans Y et pour $f, g \in \mathcal{B}(T, Y)$ posons

$$d_{\mathcal{B}}(f, g) := \sup_{t \in T} d_Y(f(t), g(t)).$$

On voit aisément (**Exer**) que $d_{\mathcal{B}}$ est une fonction à valeurs réelles, qu'elle est une distance sur $\mathcal{B}(T, Y)$ et que la convergence relativement à cette distance correspond à la convergence uniforme. La distance qu'elle induit sur un sous-ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(T, Y)$ est appellée la **distance de la convergence uniforme** sur $\mathcal{C}$. La topologie associée est la **topologie de la convergence uniforme** sur $\mathcal{C}$.

Supposons maintenant que T soit muni d'une topologie $\mathcal{O}_T$ et notons $\mathcal{C}_b(T, Y)$ le sous-espace de $\mathcal{B}(T, Y)$ constitué des applications bornées et continues. (Noter que, si $(T, \mathcal{O}_T)$ est compact, $\mathcal{C}_b(T, Y)$ coincide avec l'ensemble des applications continues $\mathcal{C}(T, Y)$ de T dans Y). Supposons qu'un sous-ensemble $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_b(T, Y)$ soit compact pour la topologie de la convergence uniforme et notons $d_{\mathcal{C}}$ la distance induite par $d_{\mathcal{B}}$. Comme la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{C}_b(T, Y)$ est moins fine que la topologie de la convergence uniforme, l'ensemble $\mathcal{K}$ est nécessairement compact pour la topologie de la convergence simple. Ceci nous dit que la compacité dans Y, pour chaque $t \in T$, de l'ensemble $\{f(t) : f \in \mathcal{K}\}$ est une condition nécéssaire. Cette condition n'étant pas suffisante (**Exerc : Préciser pourquoi**), recherchons donc une seconde condition nécessaire. Fixons $t_0 \in T$ et un réel quelconque $\varepsilon > 0$. Par précompacité de $\mathcal{K}$, il existe un entier $p \geq 1$ et $f_1, \cdots, f_p \in \mathcal{C}_b(T, Y)$ tels que $\mathcal{K} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B_{d_{\mathcal{C}}}(f_i, \varepsilon/3)$. Pour chaque $i = 1, \cdots, p$, par continuité de f_i, choisissons un voisinage V_i de t_0 dans T tel que pour tout $t \in V_i$ on ait $d_Y(f_i(t), f_i(t_0)) < \varepsilon/3$. Considérons un t quelconque dans le voisinage $V := \bigcap_{i=1}^{p} V_i$ de t_0 et un $f \in \mathcal{K}$ quelconque. D'après ce qui précède, il existe un $k \in \{1, \cdots, p\}$ (dépendant de f) tel que $f \in B_{d_{\mathcal{C}}}(f_k, \varepsilon/3)$, et donc $\sup_{s \in T} d_Y(f(s), f_k(s)) < \varepsilon/3$. Par conséquent,

$$d_Y(f(t), f(t_0)) \leq d_Y(f(t), f_k(t)) + d_Y(f_k(t), f_k(t_0)) + d(f_k(t_0), f(t_0)) < \varepsilon,$$

et donc pour tout $t \in V$ et tout $f \in \mathcal{K}$ nous avons $d_Y(f(t), f(t_0)) < \varepsilon$.

Ceci nous amène à introduire la définition suivante.

Définition 7.1 *Soient $(T, \mathcal{O}_T)$ un espace topologique, t_0 un point de T et (Y, d_Y) un* **espace métrique**. *On dit qu'un ensemble $\mathcal{H}$ d'applications de T dans Y est un ensemble d'applications* **équicontinues** *en t_0 quand pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de t_0 dans T (indépendant de $f \in \mathcal{H}$) tel que pour tout $t \in V$ et tout $f \in \mathcal{H}$ on ait $d_Y(f(t), f(t_0)) < \varepsilon$.*

Quand il y a équicontinuité en tout point d'un sous-ensemble $S \subset T$, on dit qu'il y a équicontinuité sur S. S'il y a équicontinuité sur tout T, on dira simplement que $\mathcal{H}$ est un ensemble d'applications équicontinues.

Exemples.

(a) Tout ensemble fini d'applications continues en t_0 de T dans Y est un ensemble d'applications

équicontinues en t_0.
(b) Tout sous-ensemble d'un ensemble d'applications équicontinues en t_0 est un ensemble d'applications équicontinues en t_0.
(c) La réunion d'un **nombre fini** d'ensembles d'applications équicontinues en t_0 est un ensemble d'applications équicontinues en t_0.
(d) L'adhérence dans Y^T pour la topologie de la convergence simple de tout ensemble d'applications équicontinues en t_0 est un ensemble d'applications équicontinues en t_0 (**Exer**).
(e) Supposons que (T, d_T) soit un espace métrique. Un ensemble $\mathcal{H}$ d'applications de T dans Y est un ensemble d'applications **équilipschitziennes** en t_0 quand il existe un réel $\gamma \geq 0$ et un voisinage V de t_0 dans T (tous deux indépendants de $f \in \mathcal{H}$) tels que pour tous $t, t' \in V$ et tout $f \in \mathcal{H}$ on ait $d_Y(f(t), f(t')) \leq \gamma d_T(t, t')$. Tout ensemble d'applications équilipschitziennes en t_0 est un ensemble d'applications équicontinues en t_0 (**Exer**). ■

Proposition 7.2 *Supposons que l'espace topologique $(T, \mathcal{O}_T)$ soit* **compact**. *Alors sur tout ensemble $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(T, Y)$ d'applications équicontinues la topologie de la convergence simple coincide avec la topologie de la convergence uniforme.*

Démonstration. Il est évident que la convergence uniforme d'une suite généralisée de $\mathcal{H}$ assure la convergence simple vers la même limite. Soit maintenant $(f_j)_{j \in J}$ une suite généralisée de $\mathcal{H}$ convergeant simplement sur T vers $f \in \mathcal{H}$. Montrons qu'il y a aussi convergence uniforme sur T vers f. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Par équicontinuité, pour chaque $s \in T$ il existe un voisinage ouvert U_s de s tel que pour tout $t \in U_s$ et tout $h \in \mathcal{H}$ on ait $d_Y(h(t), h(s)) < \varepsilon/4$. Par compacité de T choisissons un entier $p \geq 1$ et des éléments $s_1, \cdots, s_p \in T$ tels $T = \bigcup\limits_{i=1}^{p} U_{s_i}$. Pour chaque $i = 1, \cdots, p$ choisissons (d'après l'hypothèse de convergence simple) un $j_i \in J$ tel que pour tout $j \in J$ avec $j_i \preceq j$ on ait $d_Y(f_j(s_i), f(s_i)) < \varepsilon/4$. Fixons un $j_0 \in J$ tel que $j_i \preceq j_0$ pour tout $i = 1, \cdots, p$. Considérons un $j \in J$ avec $j_0 \preceq j$ et un $t \in T$ quelconque. Il existe un $i_t \in \{1, \cdots, p\}$ tel que $t \in U_{s_{i_t}}$. Alors

$$d_Y(f_j(t), f(t)) \leq d_Y(f_j(t), f_j(s_{i_t})) + d_Y(f_j(s_{i_t}), f(s_{i_t})) + d_Y(f(s_{i_t}), f(t)) < \frac{3\varepsilon}{4}$$

et donc pour tout $j \in J$ avec $j_0 \preceq j$ nous avons $\sup\limits_{t \in T} d_Y(f_j(t), f(t)) < \varepsilon$, ce qui traduit la convergence uniforme sur T de la suite généralisée $(f_j)_{j \in J}$ vers f. Par conséquent, les deux topologies induites sur $\mathcal{H}$ coincident (compte tenu de la caractérisation de fermés par des suites généralisées). ■

Nous pouvons maintenant caractériser les compacts pour la topologie de la convergence uniforme de $\mathcal{C}(T, Y)$ comme suit. Ce résultat est connu sous le nom de **théorème d'Arzelà-Ascoli** ou **théorème d'Ascoli**.

Théorème 7.3 (Théorème d'Arzelà-Ascoli) *Soient $(T, \mathcal{O}_T)$ un espace topologique* **compact** *et (Y, d_Y) un espace métrique. Les assertions (a) et (b) ci-dessous ont lieu.*
(a) Un sous-ensemble $\mathcal{K}$ **fermé** *(pour la topologie de la convergence uniforme) de $\mathcal{C}(T, Y)$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si*
(i) $\mathcal{K}$ est un ensemble d'applications équicontinues de T dans Y ;
et
(ii) pour chaque $t \in T$ l'ensemble $\{f(t) : f \in \mathcal{K}\}$ est compact dans (Y, d_Y).
(b) Un sous-ensemble $\mathcal{K}$ de $\mathcal{C}(T, Y)$ est d'adhérence compacte pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si

(i) $\mathcal{K}$ est un ensemble d'applications équicontinues de T dans Y ;
et
(ii) pour chaque $t \in T$ l'ensemble $\{f(t) : f \in \mathcal{K}\}$ est contenu dans un compact de (Y, d_Y).

Démonstration. (a) L'implication $\Rightarrow$ découle de l'analyse précédant la définition 7.1.

1-ère démonstration de $\Leftarrow$.

Montrons tout d'abord que $\mathcal{K}$ est simplement fermé dans Y^T. Notons $\mathcal{H}$ l'adhérence de $\mathcal{K}$ dans Y^T par rapport à la topologie de la convergence simple de Y^T et fixons $h \in \mathcal{H}$ quelconque. D'après l'exemple (d) ci-dessus, $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(T, Y)$ et $\mathcal{H}$ est un ensemble d'applications équicontinues. D'autre part, par propriété d'adhérence il existe une suite génralisée $(f_j)_{j \in J}$ de $\mathcal{K}$ convergeant simplement vers $h \in \mathcal{H}$. Nous savons d'après la proposition 7.2 que sur $\mathcal{H}$ la topologie de la convergence simple coincide avec la topologie de la convergence uniforme, donc $(f_j)_{j \in J}$ converge uniformément vers $h \in \mathcal{H}$. Comme $\mathcal{K}$ est, d'après l'hypothèse (i), fermé dans $\mathcal{C}(T, Y)$ pour la topologie de la convergence uniforme, nous obtenons $h \in \mathcal{K}$. Ainsi $\mathcal{K}$ est bien fermé dans Y^T pour la topologie de la convergence simple.

Ce caractère fermé joint à l'hypothèse (ii) nous assure, compte tenu de la caractérisation de fermés de Y^T pour la topologie de la convergence simple, que $\mathcal{K}$ est compact pour cette topologie dans Y^T. Comme $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(T, Y)$, l'ensemble $\mathcal{K}$ est compact dans $\mathcal{C}(T, Y)$ relativement à la topologie de la convergence simple. La proposition 7.2 à nouveau nous permet de conclure que $\mathcal{K}$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme.

2-ième démonstration de $\Leftarrow$.

On montre tout d'abord que $\mathcal{K}$ est un sous-ensemble complet de l'espace métrique $(\mathcal{C}(T, Y), d_{\mathcal{C}})$ (**Exer**). Montrons que ce sous-ensemble est aussi précompact. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Par équicontinuité, pour chaque $s \in T$ choisissons un voisinage ouvert U_s de s dans T tel que pour tout $t \in U_s$ et tout $f \in \mathcal{K}$ on ait $d_Y(f(t), f(s)) < \varepsilon/4$. La compacité de T nous permet de déduire de l'égalité $T = \bigcup_{s \in T} U_s$ un entier $p \geq 1$ et des éléments $s_1, \cdots, s_p \in T$ tels $T = \bigcup_{i=1}^{p} U_{s_i}$. Munissons le produit cartésien $\prod_{i=1}^{p} Y$ de la distance δ correspondant à $\max_{1 \leq i \leq p} d_Y(y_i, y'_i)$ pour $(y_1, \cdots, y_p), (y'_1, \cdots, y'_p) \in \prod_{i=1}^{p} Y$. La compacité dans cet espace (voir (ii)) de $\prod_{i=1}^{p} \{f(s_i) : f \in \mathcal{K}\}$ nous fournit un entier $q \geq 1$ et des applications $f_1, \cdots, f_q \in \mathcal{K}$ tels que $\prod_{i=1}^{p} \{f(s_i) : f \in \mathcal{K}\} \subset \bigcup_{k=1}^{q} B_\delta((f_k(s_1), \cdots, f_k(s_p)), \varepsilon/4)$. Fixons maintenant $f \in \mathcal{K}$ quelconque. D'après ce qui précède, il existe un entier $k_0 \in \{1, \cdots, q\}$ tel que $\max_{1 \leq i \leq p} d_Y(f(s_i), f_{k_0}(s_i)) < \varepsilon/4$. Pour tout $t \in T$ en choisissant un $i_t \in \{1, \cdots, p\}$ tel que $t \in U_{s_{i_t}}$, nous avons

$$d_Y(f(t), f_{k_0}(t)) \leq d_Y(f(t), f(s_{i_t})) + d_Y(f(s_{i_t}), f_{k_0}(s_{i_t})) + d_Y(f_{k_0}(s_{i_t}), f_{k_0}(t)) < \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Par conséquent $d_{\mathcal{C}}(f, f_{k_0}) = \sup_{t \in T} d_Y(f(t), f_{k_0}(t)) < \varepsilon$ et donc $\mathcal{K}$ est précompact dans $\mathcal{C}(T, Y)$. Ceci joint au fait que $\mathcal{K}$ soit complet dans $\mathcal{C}(T, Y)$ nous assure la compacité de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{C}(T, Y)$.

(b) L'assertion (b) est une conséquence de (a) (**Exer**). ■

8 Semi-continuité de fonctions à valeurs réelles étendues

On appelera ici **fonction à valeurs réelles étendues** sur un ensemble non vide X toute fonction de X dans $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. (Certains auteurs disent **fonction numérique**.) Si X est muni d'une topologie $\mathcal{O}$ et si $f(x_0)$ est fini, i.e. $f(x_0) \in \mathbb{R}$, alors la continuité de f en x_0 revient à dire que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$ on ait

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon. \tag{8.1}$$

En découplant les deux inégalités ci-dessus, on aboutit aux deux concepts de semi-continuité. Observons avant d'énoncer les définitions que pour $f(x_0) = +\infty$ on a $f(x_0) - \varepsilon = f(x_0)$ et donc au lieu de $f(x_0) - \varepsilon$ on est conduit à considérer un **réel** $r < f(x_0)$ pour la première inégalité. Une remarque similaire est valable pour la seconde inégalité.

Définition 8.1 (Semi-continuité) *Une fonction* **à valeurs réelles étendues** *f d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est* **semi-continue inférieurement** *(resp.* **semi-continue supérieurement***) en un point $a \in X$ quand pour tout* **réel** *$r < f(a)$ (resp. $r > f(a)$) il existe un voisinage V de a dans $(X, \mathcal{O})$ tel que pour tout $x \in V$ on ait*

$$r < f(x) \quad (\text{resp. } f(x) < r).$$

Si f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en tout point d'un ensemble $A \subset X$ on dit que f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur A. Quand $A = X$, on dit simplement que f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).

Par commodité, on écrit en général que f est s.c.i ou sci (resp. s.c.s ou scs) en a pour exprimer que f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en a. De même pour un ensemble A. Lorsque l'on veut spécifier la topologie $\mathcal{O}$ on écrit $\mathcal{O}$-sci (resp. $\mathcal{O}$-scs).

Exemples.
(a) Toute fonction réelle étendue continue en a est à la fois sci et scs en a. En fait cette double semi-continuité caractérise la continuité d'une fonction à valeurs réelles étendues.
(b) En procédant par l'absurde, on voit que si $f(a) = -\infty$ alors f est sci en a. De même si $f(a) = +\infty$, alors f est scs en a.
(c) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $f(x) = 1/|x|$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, est sci en tout point de $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas scs en 0.
(d) La fonction $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, avec $f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(0) = +\infty$ et $f(x) = 1/x$ si $x > 0$, est scs en tout point mais elle n'est pas sci en 0.
(e) La fonction $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, avec $f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(0) = 1$ et $f(x) = 1/x$ si $x > 0$, n'est ni sci ni scs en 0.
■

Proposition 8.2 *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions à valeurs réelles étendues et a un point de X. On a les assertions suivantes.*
(a) La fonction f est **continue** *en a si et seulement si elle* **sci et scs** *en a.*
(b) La fonction f est scs en a si et seulement si la fonction $-f$ est sci en a.
(c) Si f et g sont sci (resp. scs) en a et si $f + g$ est bien définie sur un voisinage de a, alors $f + g$ est sci (resp. scs) en a.
(d) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une **constante réelle** *non nulle. Si f est sci en a, alors la fonction αf est sci en a pour $\alpha > 0$ et scs en a pour $\alpha < 0$.*

De même, si f est scs en a, alors la fonction αf est scs en a pour $\alpha > 0$ et sci en a pour $\alpha < 0$.
(e) Si f et g sont **positives sur un voisinage de** *a, sci (resp. scs) en a et si fg est définie sur un voisinage de a alors la fonction produit fg est sci (resp. scs) en a.*
(f) Si f est **positive sur un voisinage de** *a et scs en a, alors en convenant de poser $(\frac{1}{f})(a) = 0$ si $f(a) = +\infty$ et $(\frac{1}{f})(a) = +\infty$ si $f(a) = 0$, la fonction $\frac{1}{f}$ est sci en a.*
(g) Soit $F : T \to X$ un application continue d'un espace topologique T dans X. Si F est **continue** *en a et si f est sci (resp. scs) en a, alors $f \circ F$ est sci (resp. scs) en a.*

Démonstration. (a)-(e) et (g) **Exercice.**
(f) Supposons que pour un voisinage U de a on a $f(x) \geq 0$ et notons h la fonction $\frac{1}{f}$ comme ci-dessus définie. Fixons un réel $r < h(a)$ quelconque.

Si $h(a) = 0$, alors $r < 0$ et donc $r < h(x)$ pour tout $x \in U$. La fonction h est donc sci en a.

Il reste à examiner le cas où $h(a) \in]0, +\infty]$. Dans ce cas nous pouvons fixer un réel $s > 0$ tel que $r < s < h(a)$. Les inégalités $0 < s < h(a)$ nous assurent que $1/s > f(a)$, et donc il existe par scs de f en a un voisnage $V \subset U$ de a dans X tel que pour tout $x \in V$ on ait $1/s > f(x)$. Ceci combiné avec la positivité de f sur V entraîne pour tout $x \in V$ que $s < h(x)$ et donc $r < h(x)$. D'où la sci de h en a. ■

La propriété de sci a une stabilité par rapport à la borne supérieure ponctuelle, i.e. pour la fonction $x \mapsto \sup_{i \in I} f_i(x)$ quand les fonctions $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sont sci avec **l'ensemble d'indice** I **indépendant de** $x \in I$.

Proposition 8.3 *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Alors la* **borne supérieure ponctuelle** *(resp. la borne inférieure ponctuelle) d'une famille quelconque de fonctions réelles étendues* **sci** *(resp. scs) en un point $a \in X$ est* **sci** *(resp. scs) en a.*

Démonstration. Exercice. ■

Remarque. Le résultat ci-dessus **n'a pas lieu quand l'ensemble d'indice** I **dépend de** x, i.e. il n'a pas lieu pour $x \mapsto \sup_{i \in I(x)} f_i(x)$ (resp. $x \mapsto \inf_{i \in I(x)} f_i(x)$). ■

La sci globale d'une fonction réelle étendue est reliée à son épigraphe et à ses sous-niveaux inférieurs. À une fonction réelle étendue $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on associe son **épigraphe** $\operatorname{epi} f$ et son **hypographe** $\operatorname{hypo} f$ définis comme sous-ensembles de $X \times \mathbb{R}$ par

$$\operatorname{epi} f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\} \quad \text{et} \quad \operatorname{hypo} f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \geq r\}.$$

On associe aussi à f et à chaque **réel** $r \in \mathbb{R}$ les ensembles $\{f \leq r\}$ et $\{f \geq r\}$ de sous-niveau et sur-niveau r respectivement définis comme sous-ensembles de X par

$$\{f \leq r\} := \{x \in X : f(x) \leq r\} \quad \text{et} \quad \{f \geq r\} := \{x \in X : f(x) \geq r\}.$$

Proposition 8.4 *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Les trois assertions suivantes sont* **équivalentes**.
(a) La fonction f est sci sur X.
(b) Son épigraphe $\operatorname{epi} f$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$.
(c) Pour chaque réel $r \in \mathbb{R}$ le sous-niveau $\{f \leq r\}$ est fermé dans X.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b)$: Supposons que f soit sci et fixons $(a, r) \in X \times \mathbb{R} \setminus \operatorname{epi} f$. Alors $r < f(a)$ et donc on peut fixer un réel $s \in \mathbb{R}$ vérifiant $r < s < f(a)$. Par sci de f en a il existe un voisinage ouvert V de a tel que $s < f(x)$ pour tout $x \in V$ et donc pour l'ouvert $]-\infty, s[\times V$ dans $X \times \mathbb{R}$ nous avons

$$(a, r) \in V \times]-\infty, s[\subset X \times \mathbb{R} \setminus \operatorname{epi} f.$$

Ceci nous dit que l'ensemble $X \times \mathbb{R} \setminus \operatorname{epi} f$ est un voisinage de (a, r) et donc il est un ouvert de $X \times \mathbb{R}$ en tant que voisinage de chacun de ses points. Par conséquent $\operatorname{epi} f$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$.
$(b) \Rightarrow (c)$: Si $\operatorname{epi} f$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$, alors, pour chaque $r \in \mathbb{R}$ fixé, à l'aide de l'égalité $\{f \leq r\} \times \{r\} = (\operatorname{epi} f) \cap (X \times \{r\})$ on voit facilement (**Exer**) que $\{f \leq r\}$ est fermé dans X.
$(c) \Rightarrow (a)$: Supposons (c) et fixons $a \in X$ avec $f(a) > -\infty$ et $r \in \mathbb{R}$ tel que $r < f(a)$. L'ensemble $\{f \leq r\}$ étant fermé d'après l'hypothèse, $V := \{f > r\}$ est ouvert dans X avec $a \in V$. De plus pour ce voisinage V de a dans X nous avons $r < f(x)$ pour tout $x \in V$ et donc f est sci en a. ■

Les fonctions réelles étendues sci sur un compact ont la **propriété fondamentale** suivante.

Théorème 8.5 *Toute fonction réelle étendue* **sci** *sur un* **compact** *non vide* **atteint sa borne inférieure** *sur ce compact. Cette fonction est donc aussi* **minorée par un réel sur le compact si elle est de plus à valeurs dans** $]-\infty, +\infty]$.

De même, toute fonction réelle étendue **scs** *sur un* **compact** *non vide* **atteint sa borne supérieure** *sur ce compact. Et cette fonction est aussi* **majorée par un réel sur le compact si elle est de plus à valeurs dans** $[-\infty, +\infty[$.

Démonstration Il suffit de considérer le cas où f est sci. Au lieu de raisonner avec un compact A de l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ et la topologie induite sur A, nous pouvons évidemment supposer que X est compact. Si $\inf_X f = +\infty$, il n'y a rien à établir car dans ce cas f est identiquement égale à $+\infty$. Supposons donc $\inf_X f < +\infty$ et fixons une suite décroissante $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ tendant vers $\inf_X f$ avec $r_n > \inf_X f$. La suite $(\{f_n \leq r_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une **suite décroissante de fermés non vides du compact** X et donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f \leq r_n\} \neq \emptyset$. En choisissant a dans cette intersection nous obtenons $f(a) \leq r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $f(a) \leq \lim_{n\to\infty} r_n = \inf_X f$, i.e. $f(a) \leq \inf_X f$. Ceci nous assure que $f(a) = \inf_X f$ et donc la démonstration est terminée. ■

Notre tâche maintenant est de relier la semi-continuité inférieure à un concept de limite inférieure. Pour cela nous allons introduire la notion de limite inférieure (resp. supérieure) pour une une suite ou suite généralisée de $\overline{\mathbb{R}}$ et pour une fonction d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. En vue d'une présentation unifiée, remarquons que pour la famille $\mathcal{V}(a)$ des voisinages de $a \in X$, nous avons :
- tout voisinage de a est non vide ;
- toute partie de X contenant un voisinage de a est un voisinage de a ;
- l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a.

Ceci conduit à la définition suivante. On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de parties d'un ensemble non vide T est un *filtre sur* X quand :
- pour tout $F \in \mathcal{F}$ on a $F \neq \emptyset$;
- pour tout $F \in \mathcal{F}$ et tout sous-ensemble F' de X contenant F on a $F' \in \mathcal{F}$;
- pour tous $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ on a $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

Une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ est dite être une base du filtre $\mathcal{F}$ quand la classe de toutes les parties de T contenant un ensemble appartenant à $\mathcal{B}$ coincide avec $\mathcal{F}$. Par ailleurs, on vérifie aisément (**Exer**) qu'une famille $\mathcal{B}$ de parties de T est la base d'un filtre sur T si et seulement si les ensembles appartenant à $\mathcal{B}$ sont non vides et l'intersection de deux ensembles appartenant à $\mathcal{B}$ contient un ensemble appartenant à $\mathcal{B}$. Reformulons ceci dans la définition suivante.

Définition 8.6 (Base de filtre) *On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ de parties d'un ensemble non vide T est une* base de filtre *sur T quand :*
(i) pour tout $B \in \mathcal{B}$ on a $B \neq \emptyset$;
(ii) pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Exemples.
(a) Toute base de voisinages d'un point a d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est une base de filtre sur X.
(b) Soit A une partie d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ et $a \in \operatorname{acc}_X A$. La classe $\mathcal{B} := \{V \cap A \setminus \{a\} : V \in \mathcal{V}(a)\}$ est une base de filtre sur X (**Exer**).
(c) En posant $B_n := \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on voit que la classe $\mathcal{B} := \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base de filtre sur $\mathbb{N}$ appelée la base de filtre de Fréchet sur $\mathbb{N}$ (**Exer**).
(d) De même si $(J, \preceq)$ est un ensemble préordonné filtrant croissant, pour $B_j := \{i \in J : j \preceq i\}$ la classe $\mathcal{B} := \{B_j : j \in J\}$ est une base de filtre sur J (**Exer**). On dit que c'est la base de filtre associée à l'ensemble préordonné filtrant croissant $(J, \preceq)$.
(e) Soit $\mathcal{B}$ une base de filtre sur T et $h : T \to Y$ une application. Alors la classe $\{h(B) : B \in \mathcal{B}\}$ est une base de filtre sur Y appelée base de filtre image. ■

Compte tenu des exemples ci-dessus, nous pouvons unifier les notions de convergence (ou limite) de suites, suites généralisées et applications comme suit.

Définition 8.7 *Soient $\mathcal{B}$ une base de filtre sur un ensemble non vide T et $h : T \to Y$ une application de T dans un espace topologique $(Y, \mathcal{O}_Y)$. On dit que h* **tend suivant la base de filtre** *$\mathcal{B}$ vers un élément $b \in Y$ quand pour tout voisinage W de b dans Y il existe un $B \in \mathcal{B}$ tel que $f(B) \subset W$. Si $\mathcal{O}_Y$ est séparée (Hausdorff), un tel b est unique (***Exer***). On l'appelle dans ce cas la* **limite de** *h* **suivant la base de filtre** *$\mathcal{B}$ et on écrit $\lim\limits_{\mathcal{B}} h$.*

Si $(x_j)_{j \in J}$ est une suite généralisée d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$, alors en posant $h(j) := x_j$ pour tout $j \in J$ et en considérant la base de filtre $\mathcal{B}$ sur J de l'exemple (d) ci-dessus, il est aisé de voir que la suite généralisée $(x_j)_{j \in J}$ tend dans X vers un élément $a \in X$ si et seulement si l'application $h : J \to X$ tend vers a suivant la base de filtre $\mathcal{B}$ (**Exer**).

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques et $a \in \operatorname{acc}_X A$ où A est un sous-ensemble de X. Soit h une application définie sur une partie de X contenant $A \setminus \{a\}$ et valeurs dans Y. Alors h tend vers un élément $b \in Y$ relativement à A si et seulement pour la base de filtre $\mathcal{B}$ de l'exemple (b) ci-dessus l'application h tend vers b suivant la base de filtre $\mathcal{B}$ (**Exer**).

Exercice. Soient $h_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ $i = 1, 2$ deux fonctions à valeurs réelles étendues et $\mathcal{B}$ une base de filtre sur un ensemble T. On suppose que $\lim\limits_{\mathcal{B}} h_i$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ pour chaque i. Montrer que

$$\lim_{\mathcal{B}}(h_1 + h_2) = \lim_{\mathcal{B}} h_1 + \lim_{\mathcal{B}} h_2$$

quand les additions considérées sont bien définies.

Le concept de limite suivant une base de filtre étant défini, revenons au coeur du paragraphe et introduisons les concepts de semi-limites de fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 8.8 (Semi-limites) *Soient $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction* **réelle étendue** *définie sur un ensemble non vide X et $\mathcal{B}$ une base de filtre sur X. On définit la limite inférieure et la limite supérieure de f suivant $\mathcal{B}$ par*

$$\boxed{\liminf_{\mathcal{B}} f := \sup_{B \in \mathcal{B}} \big(\inf_{x \in B} f(x)\big) \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{B}} f := \inf_{B \in \mathcal{B}} \big(\sup_{x \in B} f(x)\big)}.$$

On écrit aussi $\underline{\lim}_{\mathcal{B}} f$ *et* $\overline{\lim}_{\mathcal{B}} f$ *à la place des notations précédentes.*

Posons $m_B := \inf_B f$ et $M_B := \sup_B f$ et munissons $\mathcal{B}$ de l'ordre $\supset$ qui est filtrant croissant d'après la définition d'une base de filtre. Nous voyons que pour $B_1 \supset B_2$ nous avons $m_{B_1} \leq m_{B_2}$ et $M_{B_2} \leq M_{B_1}$. Ainsi pour le préordre $\supset$ sur $\mathcal{B}$ les suites généralisées $(m_B)_{B\in\mathcal{B}}$ et $(M_B)_{B\in\mathcal{B}}$ sont respectivement croissantes et décroissantes et donc elles tendent dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\sup_{B\in\mathcal{B}} m_B$ et $\inf_{B\in\mathcal{B}} M_B$. Cela reveint à dire que

$$\boxed{\liminf_{\mathcal{B}} f := \lim_{B\in\mathcal{B}} \big(\inf_{x\in B} f(x)\big) \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{B}} f := \lim_{B\in\mathcal{B}} \big(\sup_{x\in B} f(x)\big)}. \tag{8.2}$$

On rencontre souvent trois cas particuliers de semi-limites.
-Si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\overline{\mathbb{R}}$, alors pour $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ avec $f(n) := t_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en considérant la base de filtre naturelle de $\mathbb{N}$ (i.e. la base de filtre de Fréchet de $\mathbb{N}$) on obtient les **limites inférieure et supérieure** de cette suite de $\overline{\mathbb{R}}$ données par

$$\boxed{\liminf_{n\to\infty} t_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(\inf_{k\geq n} t_k\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\geq n} t_k\big) \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} t_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup_{k\geq n} t_k\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geq n} t_k\big)}.$$

-Si $(t_j)_{j\in J}$ est une suite généralisée de $\overline{\mathbb{R}}$, alors pour $f : J \to \overline{\mathbb{R}}$ avec $f(j) := t_j$ pour tout $j \in J$, en considérant la base de filtre associée au préordre filtrant croissant $\preceq$ de J on obtient les **limites inférieure et supérieure** de cette suite généralisée de $\overline{\mathbb{R}}$ données par

$$\boxed{\liminf_{j\in J} t_j := \sup_{j\in J} \big(\inf_{k\succeq j} t_k\big) = \lim_{j\in J} \big(\inf_{k\succeq j} t_k\big) \quad \text{et} \quad \limsup_{j\in J} t_j := \inf_{j\in J} \big(\sup_{k\succeq j} t_k\big) = \lim_{j\in J} \big(\sup_{k\succeq j} t_k\big)},$$

où $k \succeq j$ désigne $j \preceq k$.
-Supposons maintenant que X soit muni d'une topologie $\mathcal{O}$. Soient A un sous-ensemble non vide de X et $a \in \mathrm{acc}_X A$. En prenant pour base de filtre $\mathcal{B}$ l'ensemble des traces sur $A \setminus \{a\}$ des voisinages de a dans X, on obtient **les limites inférieures et supérieures de f en a relativement à A**

$$\boxed{\liminf_{A\ni x\to a} f(x) := \sup_{V\in\mathcal{V}(a)} \big(\inf_{x\in V\cap A\setminus\{a\}} f(x)\big) \quad \text{et} \quad \limsup_{A\ni x\to a} f(x) := \inf_{V\in\mathcal{V}(a)} \big(\sup_{x\in V\cap A\setminus\{a\}} f(x)\big)},$$

où $\mathcal{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a dans X. Evidemment quand $a \in A$, les semi-limites de f en a relativement à A correspondent aux semi-limites de la restriction $f|_A$ en a pour la topologie induite sur A. Par ailleurs, on voit sans difficulté (**Exer**) que l'on peut ci-dessus remplacer $\mathcal{V}(a)$ par un **système fondamental quelconque de voisinages de a** dans X.

Quand A est un voisinage de a (comme pour les limites) on écrit simplement $\liminf_{x\to a} f(x)$ et $\limsup_{x\to a} f(x)$.

La proposition suivante contient les premières propriétés des semi-limites.

Proposition 8.9 *Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{B}$ une base de filtre sur X. Les propriétés suivantes ont lieu.*
(a) $\boxed{\limsup_{\mathcal{B}}(-f) = -\liminf_{\mathcal{B}} f}$.
(b) $\boxed{\liminf_{\mathcal{B}} f \leq \limsup_{\mathcal{B}} f}$.

(c) Si $f \leq g$, *alors* $\liminf_{\mathcal{B}} f \leq \liminf_{\mathcal{B}} g$ *et* $\limsup_{\mathcal{B}} f \leq \limsup_{\mathcal{B}} g$.
(d) $\lim_{\mathcal{B}} f$ *existe dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *si et seulement si* $\liminf_{\mathcal{B}} f = \limsup_{\mathcal{B}} f$. *Si c'est le cas la limite* $\lim_{\mathcal{B}} f$ *est égale aux deux semi-limites.*
(e) Pour toute constante $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *on a*

$$\boxed{\liminf_{\mathcal{B}}(\alpha f) = \alpha \liminf_{\mathcal{B}} f \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{B}}(\alpha f) = \alpha \limsup_{\mathcal{B}} f \quad \text{si } \alpha > 0}$$

et

$$\boxed{\liminf_{\mathcal{B}}(\alpha f) = \alpha \limsup_{\mathcal{B}} f \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{B}}(\alpha f) = \alpha \liminf_{\mathcal{B}} f \quad \text{si } \alpha < 0}.$$

(f) Quand les sommes considérées ci-dessous sont bien définies on a d'une part

$$\boxed{\liminf_{\mathcal{B}} f + \liminf_{\mathcal{B}} g \leq \liminf_{\mathcal{B}}(f+g) \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{B}}(f+g) \leq \limsup_{\mathcal{B}} f + \limsup_{\mathcal{B}} g}$$

et d'autre part

$$\boxed{\liminf_{\mathcal{B}}(f+g) \leq \liminf_{\mathcal{B}} f + \limsup_{\mathcal{B}} g \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{B}} f + \liminf_{\mathcal{B}} g \leq \limsup_{\mathcal{B}}(f+g)}.$$

(g) Quand les sommes considérées ci-dessous sont bien définies et quand $\lim_{\mathcal{B}} g$ *existe on a*

$$\boxed{\liminf_{\mathcal{B}}(f+g) = \liminf_{\mathcal{B}} f + \lim_{\mathcal{B}} g \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{B}}(f+g) = \limsup_{\mathcal{B}} f + \lim_{\mathcal{B}} g}.$$

(h) En particulier pour toute constante $\alpha \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\boxed{\liminf_{\mathcal{B}}(\alpha+f) = \alpha + \liminf_{\mathcal{B}} f \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{B}}(\alpha+f) = \alpha + \limsup_{\mathcal{B}} f}.$$

(i) Si f *et* g *sont à* **valeurs positives sur un voisinage de** a, *alors*

$$\boxed{\big(\liminf_{\mathcal{B}} f\big)\big(\liminf_{\mathcal{B}} g\big) \leq \liminf_{\mathcal{B}}(fg) \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{B}}(fg) \leq \big(\limsup_{\mathcal{B}} f\big)\big(\limsup_{\mathcal{B}} g\big)},$$

et si de plus $\lim_{\mathcal{B}} g$ *existe dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *alors*

$$\boxed{\liminf_{\mathcal{B}}(fg) = \big(\liminf_{\mathcal{B}} f\big)\big(\lim_{\mathcal{B}} g\big) \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{B}}(fg) = \big(\limsup_{\mathcal{B}} f\big)\big(\lim_{\mathcal{B}} g\big)},$$

quand les produits considérés sont bien définis.

Démonstration. Exercice. ■

On a un résultat de calcul supplémentaire dans le cas de semi-limites en un point.

Proposition 8.10 *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *deux espaces topologiques,* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *et* $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *deux fonctions réelles étendues, et soit* $(a, b) \in X \times Y$.
(a) On a

$$\boxed{\liminf_{(x,y)\to(a,b)} \big(f(x) + g(y)\big) = \liminf_{x\to a} f(x) + \liminf_{y\to b} g(y)}$$

et

$$\boxed{\limsup_{(x,y)\to(a,b)} \big(f(x)+g(y)\big) = \limsup_{x\to a} f(x) + \limsup_{y\to b} g(y)},$$

quand les additions considérées sont bien définies.
(b) Si f et g sont **à valeurs positives** *sur un voisinage de a, alors*

$$\boxed{\liminf_{(x,y)\to(a,b)} \big(f(x)g(y)\big) = \big(\liminf_{x\to a} f(x)\big)\big(\liminf_{y\to b} g(y)\big)}$$

et

$$\boxed{\limsup_{(x,y)\to(a,b)} \big(f(x)g(y)\big) = \big(\limsup_{x\to a} f(x)\big)\big(\limsup_{y\to b} g(y)\big)},$$

quand les produits considérés sont bien définis.

(Noter que **dans les deux égalités ci-dessus les fonctions f et g dépendent de variables différentes***.)*

Démonstration. (a) Etablissons la première égalité. Supposons que les additions considérées soient bien définies. Alors sans perte de généralité (**Exer**) nous pouvons supposer que les additions $f(x)+g(y)$ pour tous $x \in X$ et $y \in Y$ et $\inf_U f + \inf_V g$ pour tous voisinages U de a et V de b sont bien définies. Posons $\mathcal{W} := \{U \times V : U \in \mathcal{V}_X(a) \text{ et } V \in \mathcal{V}_y(b)\}$ où $\mathcal{V}_X(a)$ (resp. $\mathcal{V}_Y(b)$) désigne l'ensemble des voisinages de a dans X (resp. de b dans Y). Nous savons que $\mathcal{W}$ est une **base de voisinages** de (a,b) dans $X \times Y$. De plus pour $U \in \mathcal{V}_X(a)$ et $V \in \mathcal{V}_Y(b)$ nous avons

$$\inf_{(x,y)\in U\times V} \big(f(x)+g(y)\big) = \inf_{x\in U} f(x) + \inf_{y\in V} g(y) = \inf_U f + \inf_V g$$

donc

$$\sup_{U\times V\in\mathcal{W}} \left(\inf_{(x,y)\in U\times V} \big(f(x)+g(y)\big)\right) = \sup_{(U,V)\in\mathcal{V}_X(a)\times\mathcal{V}_Y(b)} \big(\inf_U f + \inf_V g\big) = \sup_{U\in\mathcal{V}_X(a)} \big(\inf_U f\big) + \sup_{V\in\mathcal{V}_Y(b)} \big(\inf_V g\big).$$

L'ensemble $\mathcal{W}$ étant un système fondamental de voisinages de (a,b) dans $X \times Y$, nous avons bien obtenu l'égalité

$$\liminf_{(x,y)\to(a,b)} \big(f(x)+g(y)\big) = \liminf_{x\to a} f(x) + \liminf_{y\to b} g(y).$$

Pour la seconde égalité il suffit (par exemple) de considérer la fonction opposée pour se ramener au cas précédent.

(b) L'assertion (b) est laissée comme **exercice**. ■

Remarque. Quand les fonctions f et g dépendent de la même variable $x \in X = Y$ on a seulement des inégalités. Par exemple d'après (f) de la proposition 8.9 on a les inégalités

$$\boxed{\liminf_{x\to a} f(x) + \liminf_{x\to a} g(x) \leq \liminf_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)}$$

et

$$\boxed{\limsup_{x\to a} \big(f(x)+g(y)\big) \leq \limsup_{x\to a} f(x) + \limsup_{x\to a} g(y)}$$

quand les additions sont bien définies. ■

Étendons maintenant le concept d'élément d'adhérence d'une suite généralisée (voir la définition 5.9 à une base de filtre d'un espace topologique. Soit $\mathcal{B}$ une base de filtre sur un ensemble T et h une application de T dans un espace topologique $(Y, \mathcal{O}_Y)$. On dit qu'un point $b \in Y$ est un **élément d'adhérence ("cluster point" en anglais) de h suivant $\mathcal{B}$** quand

$$b \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \mathrm{adh}_X(h(B)).$$

Quand $T = X$ et $h = \mathrm{Id}_X$, on dit plutôt que b est un élément d'adhérence de la base de filtre $\mathcal{B}$.

Si $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un espace **compact séparé** (Hausdorff), on voit sans difficulté que l'ensemble des éléments d'adhérence de h suivant la base de filtre $\mathcal{B}$ est non vide (**Exer**).

Soit maintenant une base de filtre $\mathcal{B}$ sur X et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction réelle étendue. L'ensemble des valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ de f suivant $\mathcal{B}$ est, d'après la définition ci-dessus, le sous-ensemble

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \mathrm{adh}_{\overline{\mathbb{R}}} f(B).$$

Comme $\overline{\mathbb{R}}$ est compact, cet ensemble est un compact dans $\overline{\mathbb{R}}$ et non vide (d'après ce qui précède), et donc il admet en particulier dans $\overline{\mathbb{R}}$ un plus petit élément et un plus grand élément. La proposition ci-dessous caractérise $\liminf_{\mathcal{B}} f$ comme la plus petite valeur de ce sous-ensemble compact de $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 8.11 *Soit $\mathcal{B}$ une base de filtre sur un ensemble X et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction réelle étendue. Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) La limite inférieure $\liminf_{\mathcal{B}} f$ de f sur $\mathcal{B}$ est la plus petite valeur d'adhérence de f suivant $\mathcal{B}$.
(b) La limite supérieure $\limsup_{\mathcal{B}} f$ de f sur $\mathcal{B}$ est la plus grande valeur d'adhérence de f suivant $\mathcal{B}$.

Démonstration. Exercice. ■

En particularisant aux suites et suites généralisées de $\overline{\mathbb{R}}$ et aux fonctions réelles étendues on obtient les **carctérisations fondamentales suivantes**.

Corollaire 8.12 *(a) Si $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\liminf_{n \to \infty} t_n$ (resp. $\limsup_{n \to \infty} t_n$) est le minimum (resp. maximum) de l'ensemble des limites de sous-suites convergentes de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*
(b) Si $(t_j)_{j \in J}$ est une suite généralisée de $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\liminf_{j \in J} t_j$ (resp. $\limsup_{j \in J} t_j$) est le minimum (resp. maximum) de l'ensemble des limites de sous-suites généralisées convergentes de $(t_j)_{j \in J}$.
(c) Si $(X, \mathcal{O})$ est un espace topologique avec $a \in X$ et si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction réelle étendue, alors $\liminf_{x \to a} f(x)$ (resp. $\limsup_{x \to a} f(x)$) est le minimum (resp. maximum) de l'ensemble des limites $\lim_{j \in J} f(x_j)$ pour les suite généralisées $(x_j)_{j \in J}$ de $X \setminus \{a\}$ convergeant vers a et telles que $\lim_{j \in J} f(x_j)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si de plus $(X, \mathcal{O})$ est métrisable, alors on a les mêmes caractérisations en remplaçant suites généralisées par suites ordinaires.

Démonstration. Exercice. ■

Le lien entre la sci et la limite inféreure se trouve dans la **proposition importante** suivante.

Proposition 8.13 *Soient* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique,* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction réelle étendue et* $a \in X$.
1) Les assertions (a), (b) et (c) suivantes sont deux-à-deux équivalentes :
(a) La fonction f *est sci en* a *;*
(b) $f(a) \leq \liminf\limits_{x \to a} f(x)$ *;*
(c) Pour toute suite généralisée $(x_j)_{j \in J}$ *de* X *convergeant vers* a *dans* X *on a* $f(a) \leq \liminf\limits_{j \in J} f(x_j)$.

Si $(X, \mathcal{O})$ *est un* **espace métrisable***, alors on peut ajouter aux équivalences ci-dessus l'assertion :*
(d) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* X *convergeant vers* a *dans* X *on a* $f(a) \leq \liminf\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

2) De même les assertions (a'), (b') et (c') suivantes sont deux-à-deux équivalentes :
(a') La fonction f *est scs en* a *;*
(b') $\limsup\limits_{x \to a} f(x) \leq f(a)$ *;*
(c') Pour toute suite généralisée $(x_j)_{j \in J}$ *de* X *convergeant vers* a *dans* X *on a* $\limsup\limits_{j \in J} f(x_j) \leq f(a)$.

Si $(X, \mathcal{O})$ *est un* **espace métrisable***, alors on peut ajouter aux équivalences ci-dessus l'assertion :*
(d') Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* X *convergeant vers* a *dans* X *on a* $\limsup\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leq f(a)$.

Démonstration. Exercice. ■

9 Généralités

Pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X on notera $\mathfrak{s}$ l'application somme et $\mathfrak{p}$ l'application produit externe, i.e. les applications $\mathfrak{s} : X \times X \to X$ et $\mathfrak{p} : \mathbb{K} \times X \to X$ sont définies pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ par

$$\mathfrak{s}(x, y) := x + y \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}(\lambda, x) := \lambda x.$$

Comme d'habitude, les éléments de $\mathbb{K}$ seront souvent appelés des **scalaires** et ceux de X des **vecteurs**.

Définition 9.1 *Soit $\mathcal{O}$ une topologie sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X. On dit que cette topologie est compatible avec la stucture vectorielle de X quand les applications somme et produit externe ci-dessus sont continues pour $X \times X$ et $\mathbb{K} \times X$ munis des topologies produit. Dans ce cas on dit que $(X, \mathcal{O})$ ou X est un* **espace vectoriel topologique**. *Si de plus la topologie $\mathcal{O}$ est séparée (Hausdorff), on dit que $(X, \mathcal{O})$ ou X est un espace vectoriel topologique séparé (Hausdorff).*

Exemples. (a) Evidemment pour tout entier $m \geq 1$, pour sa topologie naturelle $\mathbb{K}^m$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique séparé (Hausdorff).
(b) Si $(X, \mathcal{O})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel topologique, alors il est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique (**Exer**) car la topologie de $\mathbb{R}$ est égale à la topologie induite sur $\mathbb{R}$ par celle de $\mathbb{C}$.
(c) Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé par une norme $\| \ \|$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique séparé pour la topologie associée à la norme $\| \ \|$ (**Exer**). Comme nous le verrons plus loin, il existe beaucoup d'espaces vectoriels topologiques dont la topologie n'est engendrée par aucune norme.
(d) Si Y est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{O})$, alors (**Exer**) pour la topologie induite $\mathcal{O}_Y$ (par $\mathcal{O}$ sur Y) le couple $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un espace vectoriel topologique.
(e) Si $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est une famille de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels topologiques, alors (**Exer**) $\prod_{i \in I} X_i$ muni de la topologie produit est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique, i.e. **le produit cartésien d'une famille de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels topologiques est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique**.
(f) Il découle de (e) que pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $(Y, \mathcal{O}_Y)$ et un ensemble non vide T, l'ensemble Y^T de toutes les applications de T dans Y est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique pour la topologie de la convergence simple. ■

La proposition suivante établit quelques premières propriétés.

Proposition 9.2 *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique et soit un entier $m \geq 2$. Alors les assertions suivantes ont lieu.*
(a) L'application de $X \times \cdots \times X$ dans X qui à $(x_1, \cdots, x_m)$ associe $x_1 + \cdots + x_m$ est continue.
(b) L'application de $\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} \times X \times \cdots \times X$ dans X qui à $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m, x_1, \cdots, x_m)$ associe $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ est continue.
(c) Pour chaque scalaire $\alpha \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ fixé et chaque vecteur $a \in X$ fixé, les applications $x \mapsto \alpha x$ et $x \mapsto a + x$ sont des homéomorphismes de X sur lui-même.

Démonstration. (a) Notons $\mathfrak{s}_m$ l'application considérée dans (a). Par définition d'un espace vectoriel topologique, nous savons que $\mathfrak{s}_2$ est continue. Montrons que c'est aussi le cas de $\mathfrak{s}_3$. Observons que les applications $g : X \times X \times X \to X \times X$ et $h : X \times X \times X \to X$, avec $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ et $h(x_1, x_2, x_3) = x_3$ sont continues (**Exer**) par propriété de topologie produit, et donc l'application $\mathfrak{s}_2 \circ g$ est continue de $X \times X \times X$ dans X. Ainsi l'application $\varphi : X \times X \times X \to X \times X$, avec $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3)$ est continue car $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (\mathfrak{s}_2 \circ g(x_1, x_2, x_3), h(x_1, x_2, x_3))$. Ceci nous assure que $\mathfrak{s}_3 = \mathfrak{s}_2 \circ \varphi$ est continue.

Supposons que la propriété de continuité ait lieu jusqu'à l'ordre m et montrons sous cette hypothèse qu'elle a aussi lieu à l'ordre $m+1$. Comme ci-dessus les applications $g : X \times \cdots \times X \times X \to X$ et $h : X \times \cdots \times X \times X \to X$, avec $g(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, x_m)$ et $h(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}) = x_{m+1}$ sont continues (par propriété de topologie produit) et donc $\mathfrak{s}_m \circ g$ est continue car d'après l'hypothèse de récurrence l'application $\mathfrak{s}_m$ est continue. Ainsi l'application $\varphi : X \times \cdots X \times X \to X \times X$, avec $\varphi(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}) := (x_1 + \cdots + x_m, x_{m+1})$ est continue car $\varphi(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}) = (\mathfrak{s}_m \circ g(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}), h(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}))$. Il en découle finalement que $\mathfrak{s}_{m+1} = \mathfrak{s}_2 \circ \varphi$ est continue, ce qui établit (a).
(b) La démonstration est similaire à celle de (a) (**Exer**).
(c) Les applications considérées dans (c) sont évidemment continues (**Exer**) d'après la définition d'un espace vectoriel topologique et elles ont pour applications réciproques les applications $x \mapsto \alpha^{-1}x$ et $x \mapsto -a + x$ qui elles aussi sont continues. Ce sont donc bien des homéomorphismes. ■

Pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X, un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ et deux sous-ensembles A et B de X, on est souvent amené à considérer les sous-ensembles suivants de X

$$A + B := \{x + y : x \in A \text{ et } y \in B\} \quad \text{et} \quad \alpha A := \{\alpha x : x \in A\}.$$

Evidemment l'opération d'addition de sous-ensembles ci-dessus est associative et commutative et pour $A = \emptyset$ on a $A + B = \emptyset$ et $\alpha A = \emptyset$. Quand A est un singleton $\{a\}$, on écrit en général $a + B$ au lieu de $\{a\} + B$.

On a également l'associativité et la commutativité des scalaires du produit externe, i.e.

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A \quad \text{et} \quad \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ et } A \subset X.$$

De plus pour $B \subset X$ on a aussi $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$. Par contre en général (**Exer**)

$$\boxed{(\alpha + \beta)A \neq \alpha A + \beta A}.$$

Enonçons quatre premières propriétés remarquables des voisinages de l'origine dans un espace vectoriel topologique. La première propriété nous dit que les voisinages de l'origine de X déterminent les voisinages de tout point de X.

Proposition 9.3 *Soient X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique et $\mathcal{S}$ un système fondamental de voisinages de 0_X dans X. Alors les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Les voisinages de chaque point $a \in X$ sont les ensembles de la forme $a + V$ où V est un voisinage de 0_X.
(b) Pour tout voisinage W de 0_X et tout entier $m \geq 1$, il existe un voisinage V de 0_X avec $V \in \mathcal{S}$ tel que $V + \cdots + V \subset W$ (la somme $V + \cdots + V$ étant prise m-fois).
(c) Pour tout sous-ensemble A de X on a

$$\boxed{\mathrm{adh}_X A = \bigcap_{V \in \mathcal{S}} (A + V)}.$$

(d) La topologie de X est séparée si et seulement si $\bigcap_{V \in \mathcal{S}} V = \{0_X\}$.

Démonstration. (a) L'assertion (a) est une conséquence du caractère homéomorphique de l'application $x \mapsto a + x$ dans la proposition ci-dessus.
(b) L'application m-somme $\mathfrak{s}_m : X \times \cdots \times X \to X$ étant, d'après la proposition ci-dessus, continue avec $\mathfrak{s}_m(0_X, \cdots, 0_X) = 0_X$, il existe (par propriété de topologie produit d'un **nombre fini** d'espaces) des voisinages $V_1, \cdots, V_m$ de 0_X dans X tels que $V_1 + \cdots + V_m = \mathfrak{s}_m(V_1 \times \cdots \times V_m) \subset W$. Ainsi en choisissant un $V \in \mathcal{S}$ contenu dans le voisinage $V_1 \cap \cdots \cap V_m$ de 0_X dans X on a $V + \cdots + V \subset W$.
(c) Nous pouvons supposer $A \neq \emptyset$ sinon il n'y a rien à démontrer. Fixons $x \in \mathrm{adh}_X A$ quelconque. Considérons un voisinage quelconque V de 0_X. L'ensemble $-V$ est encore un voisinage de 0_X (car l'application $u \mapsto -u$ est un homéomorphisme de X sur lui-même d'après la proposition ci-dessus), donc $x - V$ est un voisinage de x d'après (a) ci-dessus, ce qui entraîne que $(x - V) \cap A \neq \emptyset$, i.e. il existe $v \in V$ tel que $x - v \in A$ ce qui signifie que $x \in v + A$. Par conséquent $x \in V + A$, donc $\mathrm{adh}_X A \subset \bigcap_{V \in \mathcal{S}} (A + V)$.

L'inclusion inverse est laissée comme **exercice**.
(d) **Exercice.** ■

Nous aurons des fois à considérer les voisinages de l'origine qui sont équilibrés. Un sous-ensemble U d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X est dit être **équilibré** quand pour tout $x \in U$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| \leq 1$ on a $\lambda x \in U$. Pour tout sous-ensemble A de X on vérifie sans difficulté (**Exer**) que l'ensemble $\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$ est équilibré et qu'il est égal à l'intersection de tous ensembles équilibrés de X contenant A. C'est donc le plus petit ensemble équilibré de X contenant A. On l'appelle **l'enveloppe équilibrée** de A dans X.

Observons que si U est **équilibré** (**Exer**), alors

$$\alpha U \subset \beta U \quad \text{pour tous } \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ vérifiant } |\alpha| \leq |\beta|. \tag{9.1}$$

Proposition 9.4 *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique.*
(a) L'ensemble des voisinages fermés de 0_X est un système fondamental de voisinages de 0_X.
(b) L'ensemble des voisinages équilibrés de 0_X est un système fondamental de voisinages de 0_X.
(c) L'ensemble des voisinages équilibrés et ouverts de 0_X est un système fondamental de voisinages de 0_X.
(d) L'ensemble des voisinages équilibrés et fermés de 0_X est un système fondamental de voisinages de 0_X.

Démonstration. (a) Soit W un voisinage quelconque de 0_X dans X. D'après la proposition 9.2 il existe un voisinage U de 0_X dans X tel que $U + U \subset W$. Pour le voisinage fermé $V := \mathrm{adh_X U}$ de 0_X on a $V \subset U + U$ d'après (c) de la proposition juste ci-dessus et donc $V \subset W$. Ceci établit (a).
(b) Soit à nouveau W un voisinage quelconque de 0_X dans X. D'après la même proposition 9.2 il existe un réel $r > 0$ et un voisinage U de 0_X tels que $\alpha U \subset W$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ vérifiant $|\alpha| \leq r$. Alors l'ensemble $V := \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda r U$ est un voisinage équilibré de 0_X (**Exer**) et $V \subset W$.
(c) et (d) **Exercice.** ■

D'après la prochaine proposition ci-dessous, entre deux espaces vectoriels topologiques, la continuité à l'origine d'une application linéaire caractérise la continuité en tout point. C'est aussi le cas de toute fonction réelle sous-linéaire. On dit qu'une fonction s d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X dans $\mathbb{R}$ est **sous-linéaire** quand les deux conditions (i) et (ii) suivantes sont satisfaites :
(i) Pour tout **réel** $r \geq 0$ et tout $x \in X$ on a $s(rx) = rs(x)$ (**positive** *homogénéité*) ;
(ii) pour tous $x, y \in X$ on a $s(x + y) \leq s(x) + s(y)$ (*sous-additivité*).

Pour une fonction sous-linéaire $s : X \to \mathbb{R}$, on observe d'une part que $s(0_X) = s(2\,0_X) = 2s(0_X)$ et donc

$$\boxed{s(0_X) = 0}.$$

On observe aussi d'autre part que $s(u) = s(v + (u - v)) \leq s(v) + s(u - v)$ et donc on en déduit (**exer**) que

$$\boxed{-s(y - x) \leq s(x) - s(y) \leq s(x - y) \quad \text{pour tous } x, y \in X}.$$

En faisant $y = 0_X$ dans la première inégalité on obtient

$$\boxed{-s(x) \leq s(-x) \quad \text{pour tout } x \in X}.$$

Proposition 9.5 *Soient X et Y deux espaces vectoriels topologiques. Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Une application **linéaire** $\Lambda : X \to Y$ *de X dans Y est continue si et seulement si elle est continue en 0_X.*
(b) Une fonction réelle **sous-lineaire** $s : X \to \mathbb{R}$ *de X dans $\mathbb{R}$ est continue si et seulement si elle est continue en 0_X.*

Démonstration. (a) Supposons que l'application linéaire Λ soit continue en 0_X et fixons un point $a \in X$ quelconque. Soit W un voisinage de $\Lambda(a)$ dans Y. Alors l'ensemble $W_0 := -\Lambda(a) + W$ est un voisinage de 0_Y et donc d'après l'hypothèse il existe un voisinage V_0 de 0_X tel que $\Lambda(V_0) \subset W_0$. Alors pour le voisinage $V := a + V_0$ de a dans X on vérifie aisément (**Exer**) que $\Lambda(V) \subset W$, d'où la continuité de Λ en a.
(b) **Exercice.** ■

Nous utiliserons des fois le concept d'ensemble borné dans un espace vectoriel topologique.

Définition 9.6 *Un sous-ensemble A d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit être* **borné** *quand pour chaque voisinage V de 0_X il existe un scalaire $\alpha \neq 0$ de $\mathbb{K}$ tel que $A \subset \alpha V$.*

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(X, \|\ \|)$ on vérifie (**Exer**) sans difficulté qu'un sous-ensemble non vide A est borné au sens ci-dessus relativement à la topologie associée à la norme $\|\ \|$ si et seulement s'il existe un réel $r > 0$ (indépendant de $x \in A$) tel que $\|x\| \leq r$ pour tout $x \in A$. Ainsi la définition ci-dessus étend aux espaces vectoriels topologiques le concept d'ensemble borné connu antérieurement pour les espaces normés.

Proposition 9.7 *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique.*
(a) Tout sous-ensemble d'un ensemble borné de $(X, \mathcal{O}_X)$ est borné dans $(X, \mathcal{O}_X)$.
(b) La réunion d'un **nombre fini** *d'ensembles bornés de $(X, \mathcal{O}_X)$ est un ensemble borné dans $(X, \mathcal{O}_X)$.*
(c) Tout sous-ensemble compact de $(X, \mathcal{O}_X)$ est borné dans $(X, \mathcal{O}_X)$. (L'implication inverse n'a pas lieu).
(d) L'image d'un ensemble borné de $(X, \mathcal{O}_X)$ par une application **linéaire continue** *de $(X, \mathcal{O}_X)$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un ensemble borné dans $(Y, \mathcal{O}_Y)$.*

Démonstration. (a), (b) et (d) **Exercice.**
(c) Soit A un ensemble compact de $(X, \mathcal{O}_X)$ et soit V un voisinage quelconque de 0_X. Nous savons qu'il existe un voisinage ouvert et équilibré U de 0_X tel que $U \subset V$. Pour chaque $x \in X$ puisque

$\frac{1}{n}x \to 0_X$ quand $n \to \infty$, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $\frac{1}{n_0}x \in U$, i.e. $x \in n_0U$. Par conséquent $X = \underset{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}{\cup} nU$ et donc $A \subset \underset{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}{\cup} nU$. Par compacité de A il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A \subset \overset{k}{\underset{n=1}{\cup}} nU$ et donc $A \subset kU$ car U est équilibré (voir (9.1)). Le compact A est donc borné dans $(X, \mathcal{O}_X)$. ■

En plus du concept d'ensemble borné, on peut étendre celui de suite généralisée de Cauchy et celui d'ensemble complet comme suit.

Définition 9.8 *On dit qu'une suite généralisée* $(x_j)_{j\in J}$ *d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel topologique* $(X, \mathcal{O})$ *est* **de Cauchy** *dans cet espace quand pour tout voisinage* V *de* 0_X *il existe un* $j_0 \in J$ *tel que pour tous* $j, j' \in J$ *vérifiant* $j_0 \preceq j$ *et* $j_0 \preceq j'$ *on a* $x_j - x_{j'} \in V$.

Ainsi un sous-ensemble A *de* X *est dit être* **complet** *(resp.* **séquentiellement complet***) dans* $(X, \mathcal{O})$ *ou* $\mathcal{O}$*-complet (resp.* **séquentiellement** $\mathcal{O}$**-complet***) quand toute suite généralisée de Cauchy (resp. toute suite ordinaire de Cauchy) de points de* A *converge vers un point de* A *pour la topologie* $\mathcal{O}$*.*

Quand X *lui-même est* $\mathcal{O}$*-complet (resp. séquentiellement* $\mathcal{O}$*-complet), on dit que l'espace vectoriel topologique* $(X, \mathcal{O})$ *est complet (resp. séquentiellement complet).*

Il est facile de voir (**Exer**) qu' une suite généralisée $(x_j)_{j\in J}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(X, \|\ \|)$ est de Cauchy au sens ci-dessus pour la topologie $\mathcal{O}$ associée à la norme $\|\ \|$ si et seulement si pour chaque réel $\varepsilon > 0$ il existe un $j_0 \in J$ tel que pour tous $j, j' \in J$ vérifiant $j_0 \preceq j$ et $j_0 \preceq j'$ on a $\|x_j - x_{j'}\| < \varepsilon$. La définition ci-dessus est donc bien une extension aux espaces vectoriels topologiques de la propriété de Cauchy antérieurement connue pour les espaces normés.

Exemples. (a) Pour deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels topologiques $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ et pour $X \times Y$ muni de la topologie produit noté $\mathcal{O}$, une suite généralisée $(x_j, y_j)_{j\in J}$ est de Cauchy dans $(X \times Y, \mathcal{O})$ si et seulement si (**Exer**) les suites généralisées $(x_j)_{j\in J}$ et $(y_j)_{j\in J}$ sont de Cauchy dans $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ respectivement. Ainsi $(X \times Y, \mathcal{O})$ est complet si et seulement si $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sont complets.
(b) Si $(u_j)_{j\in J}$ et $(v_j)_{j\in J}$ sont deux suites généralisées de Cauchy du $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{O})$, alors (**Exer**) pour toutes constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ la suite généralisée $(\alpha u_j + \beta v_j)_{j\in J}$ est de Cauchy dans $(X, \mathcal{O})$.
(c) Toute sous-suite généralisée d'une suite généralisée de Cauchy du $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{O})$ est (**Exer**) une suite généralisée de Cauchy. ■

Voici quelques premiers résultats concernant la propriété de Cauchy.

Proposition 9.9 *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel topologique. On a les assertions suivantes.*
(a) Toute suite généralisée convergente de X *est de Cauchy.*
(b) La suite généralisée des images d'une suite généralisée de Cauchy de $(X, \mathcal{O})$ *par une application linéaire continue de* $(X, \mathcal{O})$ *dans un espace vectoriel topologique* $(Y, \mathcal{O}')$ *est de Cauchy dans* $(Y, \mathcal{O}')$*.*
(c) L'ensemble des points d'une suite **ordinaire** *de Cauchy de* $(X, \mathcal{O})$ *est borné dans* $(X, \mathcal{O})$*.*

Démonstration. Exercice. ■

La proposition suivante concerne elle les ensembles complets.

Proposition 9.10 *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel topologique. Les assertion suivantes ont lieu.*
(a) Tout sous-ensemble $\mathcal{O}$**-compact de** X **est** $\mathcal{O}$**-complet**.

(b) Tout ensemble $\mathcal{O}$-fermé contenu dans un ensemble $\mathcal{O}$-complet de X est $\mathcal{O}$-complet.
(c) Si la topologie $\mathcal{O}$ est **séparée (Hausdorff)**, *alors tout ensemble* **$\mathcal{O}$-complet de X est $\mathcal{O}$-fermé dans X.**

Démonstration. (a) Soit A un sous-ensemble non vide $\mathcal{O}$-compact de X et soit $(x_j)_{j\in J}$ une suite généralisée de Cauchy de X. Par propriété de compacité, il existe un ensemble préordonné filtrant croissant $(I, \preceq_I)$ et une application filtrante croissante $s : (I, \preceq_I) \to (J, \preceq_J)$ telle la sous-suite généralisée $(x_{s(i)})_{i\in I}$ converge vers un point $a \in A$. Nous affirmons que la suite généralisée $(x_j)_{j\in J}$ converge vers x. Soit en effet V un voisinage de 0_X. Choisissons un voisinage équilibré U de 0_X tel que $U + U \subset V$. Par propriétés de Cauchy et de convergence il existe un $j_0 \in J$ et un $i_0 \in I$ tels que d'une part $x_j - x_{j'} \in U$ pour tous $j, j' \in J$ vérifiant $j_0 \preceq_J j_0$ et $j_0 \preceq_J j'$, et d'autre part $x_{s(i)} \in a + U$ pour tout $i \in I$ vérifiant $i_0 \preceq_I i$. L'application s étant filtrante croissante, il existe un $i_1 \in I$ tel que $j_0 \preceq_J s(i)$ pour tout $i \in I$ vérifiant $i_1 \preceq_I i$. Choissisant $i_2 \in I$ tel que $i_0 \preceq_I i_2$ et $i_1 \preceq_I i_2$. Alors pour tout $j \in J$ avec $j_0 \preceq_J j$ nous avons

$$x_j = x_{s(i_2)} + (x_j - x_{s(i_2)}) \in a + U + U \subset a + V,$$

ce qui confirme la convergence de $(x_j)_{j\in J}$ vers $a \in A$. L'ensemble A est donc $\mathcal{O}$-complet.
(b) et (c) **Exercice.** ■

Terminons ce premier paragrahe avec les espaces vectoriels supplémentaires topologiques. Rappelons que la somme $E + F$ de deux $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X est directe ou est une somme directe algébrique (et alors on écrit $E \oplus F$) quand $E \cap F = \{0_X\}$ (i.e. $E \cap F$ est réduit à zéro). On remarque que ceci revient à dire que l'application linéaire $f : E \times F \to E + F$ définie pour tout $(x, y) \in E \times F$ par $f(x, y) := x + y$ est **bijective**.

Quand de plus, la somme des deux espaces est égale X, on dit que les deux espaces sont supplémentaires algébriques et on écrit $X = E \oplus F$.

Dans le cas où $(X, \mathcal{O})$ est un espace vectoriel topologique on introduit la définition suivante.

Définition 9.11 *On dit que la somme $E+F$ de deux $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels E et F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{O})$ est une* **somme directe topologique** *quand l'application linéaire de $E \times F$ dans $E + F$ qui à $(x, y) \in E \times F$ associe $x + y$ est* **bijective et bicontinue** *(i.e. un isomorphisme topologique) par rapport aux topologies induites par $\mathcal{O}$. Dans ce cas on écrira $E \oplus_{\rm top} F$ ou $E \oplus_{\mathcal{O}} F$ quand l'on veut préciser la topologie.*

Si de plus la somme de E et F est égale à X, on dit qu'ils sont **supplémentaires topologiques** *et on écrit $X = E \oplus_{\rm top} F$ ou $X = E \oplus_{\mathcal{O}} F$.*

Rappelons que, pour $X = E \oplus F$ (somme directe algébrique de deux $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels E et F du $\mathbb{K}$-espace vectoriel X), on appelle projecteur sur E parallèlement à F l'application notée π_E qui à chaque $x \in X$ associe l'unique élément $\pi_E(x)$ de E tel que $x - \pi_E(x) \in F$. Evidemment l'application π_E est $\mathbb{K}$-linéaire et

$$\boxed{x = \pi_E(x) + \pi_F(x) \quad \text{pour tout } x \in X}.$$

Proposition 9.12 *Soit $(X, \mathcal{O})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique et E et F deux $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de X. Alors les espaces E et F sont supplémentaires topologiques dans X, i.e. $X = E \oplus_{\rm top} F$, si et seulement si X est somme directe algébrique de E et F et le projecteur π_E est $\mathcal{O}$-continu.*

Démonstration. Quand X est somme directe algébrique de E et F, alors l'application $f : E \times F \to X$ avec $f(x, y) := x + y$ est évidemment linéaire continue et bijective . Ainsi, d'une part les projecteurs π_E et π_F sont bien définis et d'autre part l'application $g : X \to E \times F$ définie par $g(x) = (\pi_E(x), \pi_F(x))$ est l'application réciproque de f. Ainsi, puisque $Id_X(x) = \pi_E(x) + \pi_F(x)$, nous en déduisons que la continuité de g est équivalente à celle de π_E. Ceci nous dit que les assertions (a) et (b) sont équivalentes. ■

De façon plus générale, on dira que des $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels $E_1, \cdots, E_m$ du $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{O})$ sont supplémentaires topologiques dans X quand l'application linéaire $f : E_1 \times \cdots \times E_m \to X$ définie pour tout $(x_1, \cdots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ par $f(x_1, \cdots, x_m) := x_1 + \cdots + x_m$ est bijective et bicontinue pour les topologies induites. On vérifie (**Exer**), comme dans la proposition ci-dessus, que ceci équivaut à dire que les espaces $E_1, \cdots, E_m$ sont supplémentaires algébriques et que les projecteurs $\pi_{E_1}, \cdots, \pi_{E_m}$ sont tous $\mathcal{O}$-continus.

10 Espaces vectoriels topologiques localement convexes

Rappelons au préalable qu'un sous-ensemble C d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X est **convexe** quand pour tous $x, y \in C$ et tous scalaires **réels** $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ vérifiant $\alpha + \beta = 1$ on a $\alpha x + \beta y \in C$. Evidemment ceci équivaut à demander la propriété pour les réels $\alpha, \beta \in]0, 1[$ vérifiant $\alpha + \beta = 1$. Les autres faits suivants sont aussi évidents ou faciles à établir (**Exer**) :
(a) L'ensemble vide $\emptyset$ est convexe.
(b) Tout produit cartésien de convexes est convexe.
(c) L'image directe (resp. inverse) par une application **affine** d'un convexe est convexe.
(d) Convenons d'appeler **combinaison convexe** de l'ensemble C, tout élément de la forme $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$ avec $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_i \in C$, $\alpha_i \geq 0$ et $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$. Alors l'ensemble C est convexe si et seulement si toute combinaison convexe de C reste dans C.
(e) L'intersection de tous les ensembles convexes de X contenant C est un ensemble convexe et cet ensemble est égal à l'ensemble des combinaisons convexes de C. On l'appelle **l'enveloppe convexe de** C et on note $\mathrm{co}\, C$ ou $\mathrm{co}\,(C)$.
(f) Evidemment C est convexe si et seulement si $\mathrm{co}\, C = C$.
(g) Si $C \subset C'$, alors $\mathrm{co}\,(C) \subset \mathrm{co}\,(C')$. L'implication inverse n'a pas lieu.
(h) L'enveloppe convexe de tout ensemble équilibré est équilibré.
(i) Si $(X, \mathcal{O})$ est un espace vectoriel topologique, alors l'intersection de tous les ensembles convexes et fermés contenant C est un ensemble convexe et fermé contenant C et c'est évidemment le plus petit ensemble convexe fermé contenant C. On l'appelle **l'enveloppe convexe fermée de** C **dans** X. On note $\overline{\mathrm{co}}\, C$ ou $\overline{\mathrm{co}}(C)$. On ne dispose pas de description simple de $\overline{\mathrm{co}}\, C$ comme dans (e) pour un espace vectoriel topologique quelconque.
(j) On a toujours $C \subset \mathrm{co}\, C \subset \overline{\mathrm{co}}\, C$.
(k) L'ensemble C est convexe et fermé dans X si et seulement si $\overline{\mathrm{co}}\, C = C$.
(l) On a déjà observé qu'en général $(\lambda + \mu)C \neq \lambda C + \mu C$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Par contre, on a (**Exer**)

$$\boxed{(\lambda + \mu)C = \lambda C + \mu C \quad \text{pour } C \textbf{ convexe} \text{ et tous } \textbf{réels } \lambda \geq 0 \text{ et } \mu \geq 0}. \tag{10.1}$$

En plus de ce qui précède, on a les propriétés suivantes pour l'adhérence d'un ensemble convexe.

Proposition 10.1 *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique. Alors les assertions suivantes ont lieu.*
(a) L'adhérence dans X de tout ensemble convexe dans X est convexe.
(b) Pour tout sous-ensemble C de X on a $\boxed{\overline{\mathrm{co}}\, C = \mathrm{adh}_X(\mathrm{co}\, C)}$.

Démonstration. (a) Soit C un sous-ensemble convexe non vide de X et soient $x, y \in \mathrm{adh}_X C$ et $\alpha, \beta \in]0,1[$ avec $\alpha + \beta = 1$. Par propriété d'adhérence il existe deux suites généralisées $(x_j)_{j\in J}$ et $(y_j)_{j\in J}$ indexées par le même ensemble J et convergeant vers x et y respectivement. Alors $\alpha x_j + \beta y_j \in C$ et $\alpha x + \beta y = \lim_{j\in J}(\alpha x_j + \beta y_j)$, donc $\alpha x + \beta y \in \mathrm{adh}_X C$. D'où la convexité de $\mathrm{adh}_X C$.
(b) Soit C un sous-ensemble de X. D'une part, d'après l'assertion (a) établie ci-dessus $\mathrm{adh}_X(\mathrm{co}\, C)$ est un ensemble convexe fermé de X contenant C, donc par définition d'enveloppe convexe fermée on a $\overline{\mathrm{co}}\, C \subset \mathrm{adh}_X(\mathrm{co}\, C)$. D'autre part, évidemment $\mathrm{co}\, C \subset \overline{\mathrm{co}}\, C$ et $\overline{\mathrm{co}}\, C$ est fermé dans X. Par définition d'adhérence on a donc $\mathrm{adh}_X(\mathrm{co}\, C) \subset \overline{\mathrm{co}}\, C$. Cette inclusion combinée à l'inclusion inverse ci-dessus nous assure l'égalité de (b). ■

La proposition ci-dessous dit en particulier que l'intérieur d'un ensemble convexe est convexe.

Proposition 10.2 *Soit C un ensemble* **convexe** *d'un espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{O})$. Alors les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Pour tous réels $\alpha, \beta \in]0,1[$ vérifiant $\alpha + \beta = 1$ on a

$$\boxed{\alpha\, \mathrm{int}_X C + \beta\, \mathrm{adh}_X C \subset \mathrm{int}_X C}.$$

(b) L'intérieur $\mathrm{int}_X C$ de C dans X est convexe.
(c) On a aussi

$$\boxed{\mathrm{adh}_X(\mathrm{int}_X C) = \mathrm{adh}_X C \quad \text{quand } \mathrm{int}_X C \neq \emptyset}.$$

Démonstration. (a) Fixons $\alpha, \beta \in]0,1[$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Si $\mathrm{int}_X C = \emptyset$, l'inclusion est triviale. Supposons donc $\mathrm{int}_X C \neq \emptyset$ et fixons $x \in \mathrm{int}_X C$ et $y \in \mathrm{adh}_X C$ quelconques. Comme $x \in \mathrm{int}_X C$, nous pouvons choisir un voisinage U de 0_X tel que $x + U + U \subset C$. L'ensemble $\alpha\beta^{-1}U$ étant un voisinage de 0_X, il découle de la relation $y \in \mathrm{adh}_X C$ que $y \in C + \alpha\beta^{-1}U$, i.e. il existe $z \in C$ tel que $y \in z + \alpha\beta^{-1}U$. Ainsi nous avons

$$\alpha x + \beta y + \alpha U \subset \alpha x + (\beta z + \alpha U) + \alpha U = \alpha(x + U + U) + \beta z \subset \alpha C + \beta C = C.$$

Puisque αU est un voisinage de 0_X, l'inclusion $(\alpha x + \beta y) + \alpha U \subset C$ nous assure que $\alpha x + \beta y \in \mathrm{int}_X C$. D'où l'inclusion de (a).
(b) L'assertion (b) est une conséquence directe de (a).
(c) Supposons $\mathrm{int}_X C \neq \emptyset$ et fixons $c \in \mathrm{int}_X C$. Pour tout $x \in \mathrm{adh}_X$ nous avons d'après (a) ci-dessus $x_n := \frac{1}{n}c + (1 - \frac{1}{n})x \in \mathrm{int}_X C$ et donc $x \in \mathrm{adh}_X(\mathrm{int}_X C)$ car $x_n \to x$ quand $n \to \infty$. Ainsi $\mathrm{adh}_X C \subset \mathrm{adh}_X(\mathrm{int}_X C)$ et donc l'égalité dans (c) a lieu car l'inclusion inverse est évidente. ■

Concernant la compacité et l'enveloppe convexe, nous avons le résultat suivant.

Théorème 10.3 *(***Théorème de Mazur relatif à la $\|\ \|$-compacité de $\overline{\mathrm{co}}$***) Dans un* **$\mathbb{K}$-espace de Banach** *$(X, \|\ \|)$ l'enveloppe convexe fermée de tout ensemble $\|\ \|$-compact est $\|\ \|$-compact.*

Démonstration. Soit $C \subset X$ un ensemble $\|\ \|$-compact. Il suffit de montrer que $\mathrm{co}\, C$ est $\|\ \|$-précompact. Notons $\mathbb{U} := B(0_X; 1)$ la boule unité ouverte centrée à l'origine et fixons un réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Par compacité de C il existe $a_1, \cdots, a_m \in C$ tels que

$$C \subset \{a_1, \cdots, a_m\} + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{U} \quad \text{et donc} \quad \mathrm{co}\, C \subset \mathrm{co}(\{a_1, \cdots, a_m\}) + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{U}.$$

Considérons alors l'application continue $\Phi : \mathbb{R}^m \times X^m \to X$ définie par

$$\Phi(\lambda_1, \cdots, \lambda_m, x_1, \cdots, x_m) := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k.$$

Nous voyons que

$$\mathrm{co}(\{a_1, \cdots, a_m\}) = \Phi(\Lambda \times (\{a_1\} \times \cdots \times \{a_m\}))$$

pour $\Lambda := \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : \lambda_k \geq 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1\}$. Par continuité de Φ et par compacité de l'ensemble $\Lambda \times (\{a_1\} \times \cdots \times \{a_m\})$, nous déduisons que $\mathrm{co}(\{a_1, \cdots, a_m\})$ est $\| \, \|$-compact. Il existe donc $c_1, \cdots, c_n \in \mathrm{co}(\{a_1, \cdots, a_m\}) \subset \mathrm{co}\, C$ tels que $\mathrm{co}(\{a_1, \cdots, a_m\}) \subset \{c_1, \cdots, c_n\} + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{U}$ et donc $\mathrm{co}\, C \subset \{c_1, \cdots, c_m\} + \varepsilon\mathbb{U}$. D'où la $\| \, \|$-précompacité de $\mathrm{co}\, C$ et la fin de la démonstration. ■

Nous allons nous intéresser aux espaces vectoriels topologiques admettant un système fondamental de voisinages convexes de l'origine.

Définition 10.4 *On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{O})$ est* **localement convexe** *quand il admet un système fondamental de voisinages convexes de 0_X. On dit alors que $(X, \mathcal{O})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique localement convexe ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel localement convexe ou un $\mathbb{K}$-espace localement convexe.*

Exemples.
(a) Si $\| \, \|$ est une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X, alors, pour la topologie associée à cette norme, X est un espace vectoriel localement convexe séparé (Hausdorff) car les boules centrées à l'origine sont convexes et forment un système fondamental de voisinages de l'origine.
(b) Si Y est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel localement convexe $(X, \mathcal{O})$, alors pour la topologie induite $\mathcal{O}_Y$ sur Y par $\mathcal{O}$, le couple $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel localement convexe.
(c) **Tout produit cartésien de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels localement convexes est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel localement convexe pour la topologie produit**.
(d) En particulier, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel localement convexe Y et tout ensemble non vide T, l'ensemble Y^T de toutes les applications de T dans Y est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel localement convexe pour la topologie de la convergence simple. ■

Dans un espace localement convexe on a aussi d'autres systèmes fondamentaux remarquables de voisinages de l'origine.

Proposition 10.5 *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique localement convexe. On a les assertions suivantes.*
(a) L'ensemble des voisinages convexes et ouverts de 0_X est un système fondamental de voisinages de 0_X.
(b) L'ensemble des voisinages convexes et fermés de 0_X est un système fondamental de voisinages de 0_X.
(c) L'ensemble des voisinages convexes et équilibrés de 0_X est un système fondamental de voisinages de 0_X.
(d) L'ensemble des voisinages convexes, équilibrés et ouverts de 0_X est un système fondamental de voisinages de 0_X ;
(e) L'ensemble des voisinages convexes, équilibrés et fermés de 0_X est un système fondamental de voisinages de 0_X.

Démonstration. (a) Soit W un voisinage quelconque de 0_X. Par définition d'espace localement convexe il existe un voisinage convexe W_0 de 0_X tel que $W_0 \subset W$. Comme W_0 est un voisinage de 0_X qui vérifie $W_0 \subset W_0$, nous avons $0_X \in \mathrm{int}_X W_0$. Ainsi $V := \mathrm{int}_X W_0$ est un voisinage ouvert de 0_X vérifiant $V \subset W$ et la dernière proposition ci-dessus nous dit que V est convexe. L'assertion (a) est donc démontrée.
(c) Fixons un voisinage quelconque W de 0_X. L'espace X étant localement convexe il existe un voisinage convexe W_0 de 0_X tel que $W_0 \subset W$. Sachant que dans un espace vectoriel topologique les voisinages équilibrés de l'origine constituent un système fondamental de voisinages de l'origine, nous pouvons choisir un voisinage équilibré U de 0_X tel que $U \subset W_0$. L'ensemble $V := \mathrm{co}\, U$ est évidemment un voisinage convexe de 0_X et il est équilibré car l'enveloppe convexe de tout ensemble équilibré est équilibré. Finalement, l'inclusion $U \subset W_0$ et la convexité de W_0 nous assurent que $V = \mathrm{co}\, U \subset W_0$ et donc $V \subset W$. D'où la propriété (c).
(b), (d) et (e) **Exercice.** ■

Le concept de semi-norme permet de donner d'autres exemples importants d'espaces localement convexes en plus des exemples précédents.

Définition 10.6 *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'une fonction $p : X \to \mathbb{R}$ est une* **semi-norme** *quand les propriétés (i) et (ii) suivantes sont vérifiées :*
(i) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ pour tous $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$;
(ii) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ pour tous $x, y \in X$.

Evidemment toute norme est une semi-norme mais l'inverse n'a pas lieu. Par exemple, la fonction $p : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{R}$ avec $p(x_1, x_2) := |x_1|$ est un semi-norme mais elle n'est pas une norme sur $\mathbb{K}^2$.

Une semi-norme p sur X étant évidemment une fonction réelle sous-linéaire, nous avons en particulier

$$\boxed{p(0_X) = 0}.$$

D'autre part, en écrivant $0 = p(0_X) \le p(x) + p(-x) = 2p(x)$ nous voyons que

$$\boxed{p(x) \ge 0 \quad \text{pour tout } x \in X}.$$

Enfin par récurrence sur l'entier $m \ge 1$ on voit que pour tous $x_1, \cdots, x_m$ dans X on a

$$\boxed{p(x_1 + \cdots + x_m) \le p(x_1) + \cdots + p(x_m)}.$$

A un point $a \in X$ et un réel $r > 0$ il sera commode par la suite d'associer les p-semi-boules ouverte et fermée de centre a et de rayon r définies respectivement par

$$B_p(a; r) := \{x \in X : p(x-a) < r\} \quad \text{et} \quad B_p[a; r] := \{x \in X : p(x-a) \le r\}.$$

Considérons maintenant une famille $(p_i)_{i \in I}$ de semi-normes sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel X. Evidemment $\displaystyle\bigcup_{(i,x,r) \in I \times X \times]0,\infty[} B_{p_i}(x; r) = X$ et donc la famille des semi-boules ouvertes est **sous-base d'une topologie** $\mathcal{O}$ sur X. Par définition la famille des intersections de **nombres finis** de semi-boules ouvertes est une **base de la topologie** $\mathcal{O}$. Il est aisé de voir (**Exer**) que la famille des intersections de **nombres finis** de semi-boules ouvertes centrées en 0_X, i.e. la famille des $\displaystyle\bigcap_{i \in K} B_{p_i}(0_X; r_i)$, pour K

parcourant les **parties finies non vides** de I et $r_i > 0$, est un système fondamental de $\mathcal{O}$-voisinages de 0_X. On peut aussi montrer que la famille

$$\Big(\bigcap_{i\in K} B_{p_i}(0_X;r)\Big)_{r>0,\,K\in\mathcal{P}_{\text{fini}}(I)} \tag{10.2}$$

(i.e. avec K parcourant l'ensemble des **parties finies non vides** de I et r>0) est aussi un **système fondamental de $\mathcal{O}$-voisinages de** 0_X. Ces ensembles étant convexes et les applications somme et produit externe étant continues (**Exer**) pour cette topologie $\mathcal{O}$ ainsi engendrée par la famille de semi-normes $(p_i)_{i\in I}$, le couple $(X,\mathcal{O})$ est un espace vectoriel topologique localement convexe. On dit que $\mathcal{O}$ est la **topologie localement convexe engendrée par la famille de semi-normes** $(p_i)_{i\in I}$.

La propossition suivante établit quelques premières propriétés.

Proposition 10.7 *Soit $\mathcal{O}$ la topologie engendrée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X par une famille $(p_i)_{i\in I}$ de semi-normes. On a les propriétés suivantes.*
(a) Les semi-boules ouvertes sont des ensembles $\mathcal{O}$-ouverts.
(b) Les semi-boules fermées sont des ensembles $\mathcal{O}$-fermés.
(c) La topologie $\mathcal{O}$ est séparée (Hausdorff) si et seulement si pour chaque vecteur **non nul** *$x \in X$ il existe un $i_x \in I$ tel que $p_{i_x}(x) \neq 0$.*

Démonstration. (a) et (b) **Exercice**.
(c) Supposons que $\mathcal{O}$ soit séparée (Hausdorff). Fixons $x \neq 0_X$ dans X quelconque. D'après l'hypothèse de séparation de l'espace il existe un $\mathcal{O}$-voisinage V de 0_X tel que $x \notin V$. D'après (10.2) il existe un réel $r > 0$ et une partie finie non vide K de I tels que $\bigcap_{i\in K} B_{p_i}(0_X;r) \subset V$ et donc $x \notin \bigcap_{i\in K} B_{p_i}(0_X;r)$. Par conséquent, il existe un $i_x \in K$ tel que $x \notin B_{p_{i_x}}(0_X;r)$ et donc $p_{i_x}(x) \neq 0$.

L'implication inverse est laissée comme **exercice**. ■

Etablissons pour des topologies engendrées par des familles de semi-normes une caratérisation de la continuité d'une application linéaire, semblable à celle connue dans le cas d'espaces normés.

Théorème 10.8 *(***Théorème de caractérisation de la continuité d'applications linéaires et fonctions sous-linéaires sur des espaces localement convexes associés à des semi-normes***)* *Soient $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$ les topologies engendrées sur deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels X et Y respectivement par des familles de semi-normes $(p_i)_{i\in I}$ sur X et $(q_j)_{j\in J}$ sur Y. Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Une application **linéaire** *$\Lambda : X \to Y$ de X dans Y est $(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_Y)$-continue si et seulement si pour chaque $j \in J$ fixé il existe un réel $\gamma \geq 0$ et une partie* **finie non vide** *K de I (dépendants de j mais* **indépendants tous deux de** *$x \in X$) tels que pour tout $x \in X$ on ait*

$$\boxed{q_j(\Lambda(x)) \leq \gamma \max_{i\in K} p_i(x)}.$$

(b) Une fonction **réelle sous-linéaire** *$s : X \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{O}_X$-continue si et seulement s'il existe un réel $\gamma \geq 0$ et une partie* **finie non vide** *K de I (***tous deux indépendants de** *$x \in X$) tels que pour tout $x \in X$ on ait*

$$\boxed{s(x) \leq \gamma \max_{i\in K} p_i(x)}.$$

(c) En particulier, pour chaque $i \in I$ la semi-norme p_i est $\mathcal{O}_X$-continue. Ainsi **les semi-normes engendrant une topologie localement convexe sont continues pour cette topologie**.

Démonstration (a) Supposons que l'application linéaire Λ soit continue et fixons un $j \in J$ quelconque. La semi-boule ouverte $B_{q_j}(0_Y;1)$ étant un voisinage de 0_Y, il existe un réel $r > 0$ et une partie finie non vide K de I tels que pour tout $u \in \bigcap_{i\in K} B_{p_i}(0_X;r)$ on ait $\Lambda(u) \in B_{q_j}(0_Y;1)$, i.e. $q_j(\Lambda(u)) < 1$. Fixons $x \in X$ quelconque. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ nous remarquons que

$$\frac{r}{\varepsilon + \max_{i\in K} p_i(x)} x \in \bigcap_{i\in K} B_{p_i}(0_X;r)$$

et donc d'après ce qui précède

$$q_j\big(\Lambda(\frac{r}{\varepsilon + \max_{i\in K} p_i(x)} x)\big) < 1, \ \textit{i.e.}, \ q_j(\Lambda(x)) < \frac{1}{r}(\varepsilon + \max_{i\in K} p_i(x)).$$

Ceci étant vrai pour tout réel $\varepsilon > 0$ nous en déduisons que

$$q_j(\Lambda(x)) \le \frac{1}{r} \max_{i\in K} p_i(x).$$

D'où l'inégalité de (a) avec $\gamma = 1/r$.

L'implication inverse de (a) est laissée comme **exercice**.

(b) **Exercice**.

(c) C'est (**Exer**) une conséquence directe de (b). ■

Examinons le cas d'un produit fini d'espaces localement convexes associés à des semi-normes données. Un produit fini d'espaces normés en est un cas particulier.

Proposition 10.9 *Soient $X_1, \cdots, X_m$ un ensemble* **fini** *de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit pour chaque $k = 1, \cdots, m$ une famille $(p_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ de semi-normes sur X_k dont la topologie localement convexe associée est $\mathcal{O}_k$. Soit $\mathcal{O}$ la topologie produit sur $X := X_1 \times \cdots \times X_m$ de ces topologies et soient pour chaque $i := (i_1, \cdots, i_m) \in I := I_1 \times \cdots I_m$ les semi-normes sur X définies pour $x := (x_1, \cdots, x_m) \in X$ par*

$$p_i(x) := \max_{1\le k\le m} p_{k,i_k}(x_k), \ \ p'_i(x) := \sum_{k=1}^{m} p_{k,i_k}(x_k), \ \ p''_i(x) := \big(\sum_{k=1}^{m} p_{k,i_k}(x_k)^2\big)^{1/2}.$$

Alors chacune des familles de semi-normes $(p_i)_{i\in I}$, $(p'_i)_{i\in I}$ et $(p''_i)_{i\in I}$ engendre la topologie produit localement convexe $\mathcal{O}$.

Démonstration. Exercice. ■

Concernant les concepts de convergence et d'ensembles bornés nous avons les caractérisations suivantes (semblables à celles existant pour les espaces normés).

Proposition 10.10 *(***Caractérisation de convergence et de bornés dans un espace localement convexe associé à des semi-normes***) Soit $\mathcal{O}$ la topologie engendrée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X par une famille de semi-normes $(p_i)_{i\in I}$. Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Une suite généralisée $(x_j)_{j\in J}$ converge vers un point x dans $(X, \mathcal{O})$ si et seulement si

$$\boxed{\text{pour chaque } i \in I \text{ on a} \quad p_i(x_j - x) \xrightarrow[j\in J]{} 0 \text{ dans } \mathbb{R}}.$$

*(b) Un sous-ensemble non vide A de X est borné dans $(X, \mathcal{O}_X)$ si et seulement si pour chaque $i \in I$ la semi-norme p_i est majorée dans $\mathbb{R}$ sur A, i.e. il existe un réel $r_i \ge 0$ (***indépendant de** $x \in A$*) tel que*

$$\boxed{p_i(x) \le r_i \quad \text{pour tout } x \in A}.$$

Démonstration. Exercice. ■

Nous allons maintenant établir que pour tout espace localement convexe $(X, \mathcal{O})$ il existe un famille de semi-normes sur X engendrant la topologie $\mathcal{O}$.

Disons tout d'abord qu'un sous-ensemble C d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X est **absorbant** quand pour chaque $x \in X$ il existe un réel $r > 0$ (dépendant de x) tel que $\lambda x \in C$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifiant $|\lambda| \leq r$. Un tel ensemble contient donc toujours 0_X. Evidemment tout voisinage de zéro dans un espace vectoriel topologique est absorbant.

Soit C un ensemble **convexe et absorbant** dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X. Pour chaque $x \in X$, l'ensemble $\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in C\}$ est non vide d'après la définition d'ensemble absorbant et il est minoré dans $\mathbb{R}$ par 0. Par conséquent on peut considérer la fonction $j_C : X \to \mathbb{R}_+$ donnée par

$$\boxed{j_C(x) := \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in C\} \quad \text{pour tout } x \in X}.$$

Beaucoup de résultats concernant les ensembles convexes dans les espaces vectoriels topologiques sont liés à cette fonction j_C. On l'appelle la **jauge** ou **fonction jauge** ou **fonction de Minkowski** de C.

Observons tout d'abord que la fonction jauge est toujours sous-linéaire.

Lemme 10.11 *La fonction jauge j_C d'un* **convexe absorbant** *C d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X est* **sous-linéaire**.

Démonstration. La positive homogénéité étant triviale (**Exer**), fixons deux éléments quelconques $x, y \in X$. Considérons deux réels $s, t > 0$ quelconques tels que $s^{-1}x \in C$ et $t^{-1}y \in C$. Alors l'égalité

$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \frac{s}{s+t}(s^{-1}x) + \frac{t}{s+t}(t^{-1}y)$$

combinée avec la convexité de C nous assure que $\frac{1}{s+t}(x+y) \in C$ et donc $j_C(x+y) \leq s+t$. En prenant la borne inférieure des deux membres sur les $s > 0$ tels que $s^{-1}x \in C$ nous obtenons $j_C(x+y) \leq j_C(x) + t$. Et finalement le passage à la borne inférieure sur les $t > 0$ vérifiant $t^{-1}y \in C$ donne $j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$, ce qui termine la démonstration. ■

Observons maintenant que, si $j_C(x) < 1$, alors (par définition de j_C) il existe un réel strictement positif $t < 1$ tel que $\frac{1}{t}x \in C$ donc $x \in tC = tC + (1-t)\{0_X\} \subset tC + (1-t)C = C$, ce qui entraîne $x \in C$. Ainsi on a toujours sous l'hypothèse que C soit **convexe absorbant**

$$\boxed{\{x \in X : j_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X : j_C(x) \leq 1\}}, \tag{10.3}$$

la première inclusion résulte de ce qui précède et la seconde est évidente.

Le lemme suivant apporte plus de précisions sur les deux inclusions de (10.3) ci-dessus quand C est un convexe d'un espace vectoriel topologique dont l'intérieur contient l'origine.

Lemme 10.12 *Soit C un convexe d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{O})$ contenant 0_X dans son intérieur, i.e. tel que $0_X \in \mathrm{int}_X C$. Sous ces conditions on a les propriétés suivantes.*
(a) La fonction jauge j_C est bien définie et est $\mathcal{O}$-continue sur X ;
(b) $\mathrm{int}_X C = \{x \in X : j_C(x) < 1\}$ et $\mathrm{adh}_X C = \{x \in X : j_C(x) \leq 1\}$.

Démonstration. (a) Notons tout d'abord que le convexe C est absorbant car il est un voisinage de 0_X puisque $0_X \in \text{int}_X C$. Pour avoir la continuité de sa fonction jauge, nous savons qu'il suffit de montrer que cette fonction sous-linéaire j_C est continue en 0_X. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ quelconque. L'ensemble εC est un voisinage de 0_X (car il contient 0_X dans son intérieur) et pour tout $x \in \varepsilon C$ on a $0 \leq j_C(x) = j_C(\varepsilon(\varepsilon^{-1}x)) = \varepsilon j_C(\varepsilon^{-1}x) \leq \varepsilon$ car $j_C(\varepsilon^{-1}x) \leq 1$ puisque $\varepsilon^{-1}x \in C$. Ceci combiné à l'égalité $j_C(0_X) = 0$ nous assure de la continuité de j_C en 0_X.
(b) D'après (10.3) l'ensemble $\{x \in C : j_C(x) < 1\}$ est contenu dans C et d'après (a) nous savons qu'il est $\mathcal{O}$-ouvert. Par conséquent $\{x \in X : j_C(x) < 1\} \subset \text{int}_X C$.

Fixons maintenant $x \in \text{int}_X C$ quelconque. Alors C est un voisinage de x. Comme $rx \to x$ quand $r \to 1$ dans $\mathbb{R}$, il existe un réel $r > 1$ tel que $rx \in C$. Et pour le réel strictement positif $t := \frac{1}{r} < 1$ nous avons $\frac{1}{t}x \in C$ et donc $j_C(x) \leq t < 1$. Ceci nous dit que $\text{int}_X C \subset \{x \in X : j_C(x) < 1\}$ et donc compte tenu de l'inclusion inverse ci-dessus nous aboutissons à la première égalité de (b).

La seconde égalité de (b) est laissée comme **exercice**. ■

Quand l'ensemble **convexe absorbant** C est **de plus équilibré** on a $\frac{1}{t}\lambda x \in C$ si et seulement si $\frac{1}{t}|\lambda|x \in C$ d'après (9.1) et donc $\{t > 0 : \frac{1}{t}\lambda x \in C\} = \{t > 0 : \frac{1}{t}|\lambda|x \in C\}$. Par conséquent $j_C(\lambda x) = j_C(|\lambda|x)$ et donc (puisque $j_C(|\lambda|x) = |\lambda| j_C(x)$ par positive homogénéité de j_C) nous obtenons $j_C(\lambda x) = |\lambda| j_C(x)$ pour tout $x \in X$. Ceci combiné à la sous-additivité de j_C nous dit que j_C est une semi-norme. On la note souvent dans ce cas p_C au lieu de j_C et on dit que c'est la **semi-norme associée au convexe équilibré absorbant** C.

Théorème 10.13 *Pour tout espace vectoriel topologique* **localement convexe** $(X, \mathcal{O})$ *il existe une famille de semi-normes engendrant la topologie* $\mathcal{O}$*. Plus précisément la famille des semi-normes associées aux* $\mathcal{O}$*-voisinages convexes, équilibrés et ouverts de* 0_X *engendre la topologie* $\mathcal{O}$ *et cette famille coincide avec la famille des semi-normes* $\mathcal{O}$*-continues.*

Démonstration. Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des voisinages convexes, équilibrés et ouverts de 0_X dans $(X, \mathcal{O})$. Nous avons vu que c'est un système fondamental de voisinages de 0_X dans l'espace localement convexe $(X, \mathcal{O})$. A chaque $U \in \mathcal{U}$ associons la semi-norme p_U définie ci-dessus et notons τ la topologie engendrée sur X par la famille des semi-normes $(p_U)_{U \in \mathcal{U}}$. Pour chaque $U \in \mathcal{U}$ le lemme ci-dessus nous dit que $U = \{x \in X : p_U(x) < 1\}$ et donc U est un τ-voisinage de 0_X en tant que semi-boule ouverte. Par conséquent $\mathcal{O} \subset \tau$.

Soit maintenant W un τ-voisinage quelconque de 0_X. Il existe un réel $r > 0$, un entier $m \geq 1$ et $U_1, \cdots, U_m \in \mathcal{U}$ tels que $V := \bigcap_{k=1}^{m} B_{p_{U_k}}(0_X; r) \subset W$. L'assertion (a) du lemme ci-dessus entraîne que pour chaque k l'ensemble $B_{p_{U_k}}(0_X; r)$ est un $\mathcal{O}$-ouvert et donc V est un $\mathcal{O}$-voisinage ouvert de 0_X avec $V \subset W$. Nous en déduisons que W est un $\mathcal{O}$-voisinage de 0_X, ce qui donne $\tau \subset \mathcal{O}$. Compte tenu de l'inclusion inverse ci-dessus, nous aboutissons à $\tau = \mathcal{O}$, i.e. $\mathcal{O}$ coincide avec la topologie engendrée par la famille des semi-normes $(p_U)_{U \in \mathcal{U}}$.

L'égalité entre la famille des semi-normes $\mathcal{O}$-continues et la famille des semi-normes associées aux voisinages convexes, équilibrés et ouverts de 0_X est laissée comme **exercice**. ■

11 Théorème de Hahn-Banach analytique

Cette section est consacrée au fameux théorème d'Analyse Fonctionnelle connu sous le nom de théorème de Hahn-Banach analytique.

Théorème 11.1 (Théorème de Hahn-Banach analytique) *Soit* $s : X \to \mathbb{R}$ *une fonction réelle* **sous-linéaire** *sur un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* X*. Soient* Y *un* $\mathbb{R}$*-sous-espace vectoriel de* X *et* $f : Y \to \mathbb{R}$

une **forme $\mathbb{R}$-linéaire** *définie sur Y et vérifiant*

$$f(x) \leq s(x) \quad \text{pour tout } x \in Y.$$

Alors il existe (au moins) une **forme $\mathbb{R}$-linéaire** $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *vérifiant*

$$\varphi(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in Y \quad \textit{et} \quad \varphi(x) \leq s(x) \quad \text{pour tout } x \in X,$$

i.e. il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire qui étend f à X tout entier et qui reste majorée par s sur X.

Démonstration. Considérons l'ensemble $\mathcal{G}$ des couples (G, g) où G est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de X contenant Y et où $g : G \to \mathbb{R}$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur G vérifiant $g(x) \leq s(x)$ pour tout $x \in G$. Cet ensemble est non vide car il contient évidemment (Y, f). Ordonnons $\mathcal{G}$ par la relation d'ordre $\preceq$ définie par $(G_1, g_1) \preceq (G_2, g_2)$ si $G_1 \subset G_2$ et g_2 est un prolongement de g_1 sur G_2. Soit $(G_i, g_i)_{i \in I}$ une chaine de $\mathcal{G}$, i.e. une famille totalement ordonnée de $\mathcal{G}$. On vérifie sans difficulté (**Exer**) que $H := \underset{i \in I}{\cup} G_i$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de X contenant Y, que l'on peut définir une forme $\mathbb{R}$-linéaire $h : H \to \mathbb{R}$ en posant $h(x) := g_i(x)$ si $x \in G_i$ avec $i \in I$. Le couple (H, h) ainsi défini est donc un élément de $\mathcal{G}$ qui majore pour $\preceq$ la famille $(G_i, g_i)_{i \in I}$. Le lemme de Zorn nous dit donc que $\mathcal{G}$ admet un élément maximal (G_0, g_0) relativement à l'ordre $\preceq$. Montrons que $G_0 = X$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un $v \in X \setminus G_0$. Fixons $\alpha \in \mathbb{R}$ et considérons sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $G := G_0 \oplus \mathbb{R}v$ la **forme $\mathbb{R}$-linéaire** $g : G_0 \oplus \mathbb{R}v \to \mathbb{R}$ définie par $g(x+tv) = g_0(x) + t\alpha$ pour tous $x \in G_0$ et $t \in \mathbb{R}$. Nous allons déterminer α de sorte que pour tout $x \in G_0$ on ait

$$g_0(x) + \alpha \leq s(x+v) \quad \text{et} \quad g_0(x) - \alpha \leq s(x-v). \tag{11.1}$$

Nous observons que α vérifie (11.1) pour tout $x \in G_0$ si et seulement si

$$\sup_{u \in G_0} [g_0(u) - s(u-v)] \leq \alpha \leq \inf_{x \in G_0} [s(x+v) - g_0(x)]. \tag{11.2}$$

Or pour tous $u, x \in G_0$ nous avons

$$g_0(u) + g_0(x) = g_0(u+x) \leq s(u+x) = s(u-v+v+x) \leq s(u-v) + s(v+x))$$

donc $g_0(u) - s(u-v) \leq s(x+v) - g_0(x)$, ce qui nous assure que $\sup_{u \in G_0} [g_0(u) - s(u-v)]$ et $\inf_{x \in G_0} [s(x+v) - g_0(x)]$ existent dans $\mathbb{R}$ et que $\sup_{u \in G_0} [g_0(u) - s(u-v) \leq \inf_{x \in G_0} [s(x+v) - g_0(x)]$. Nous pouvons donc choisir $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfaisant (11.2), i.e. satisfaisant (11.1). Pour ce réel α satisfaisant (11.1) on vérifie aisément (**Exer**) compte tenu de la positive homogénéité de s et de la linéarité de g_0 que $g(x+tv) = g_0(x) + tv \leq s(x+tv)$ pour tous $x \in G_0$ et $t \in \mathbb{R}$. Nous obtenons donc $(G, g) \in \mathcal{G}$ et $(G_0, g_0) \preceq (G, g)$ avec $(G_0, g_0) \neq (G, g)$, ce qui contredit la maximalité de (G_0, g_0). Par conséquent $G_0 = X$ et la forme linéaire $\varphi := g_0$ est une extension de f sur X majorée par s sur X. ■

12 Théorèmes de séparation de Hahn-Banach

Via le théorème de Hahn-Banach analytique, nous allons dans ce paragraphe établir des résultats de séparation géométrique. Rappelons que dans un espace vectoriel X tout ensemble de la forme $\{x \in X : \varphi(x) = \alpha\}$, où φ est une forme linéaire sur X **non identiquement nulle** et α est un scalaire, est appelé un **hyperplan affine** ou **hyperplan** de X. Quand de plus X est un espace vectoriel topologique séparé et φ est continue, alors l'hyperplan est fermé.

Rappelons que pour une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ à valeurs complexes, les fonctions $\mathcal{R}\mathrm{e} f : X \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{I}\mathrm{m} f : X \to \mathbb{R}$ désigne la fonction partie réelle et la fonction partie imaginaire de f, i.e. $(\mathcal{R}\mathrm{e} f)(x) := \mathcal{R}\mathrm{e}(f(x))$ et $(\mathcal{I}\mathrm{m} f)(x) := \mathcal{I}\mathrm{m}(f(x))$ pour tout $x \in X$. Par ailleurs, pour une **forme $\mathbb{C}$-linéaire** $\varphi : X \to \mathbb{C}$ on vérifie (**Exer**) sans difficulté pour tout $x \in X$ que

$$\boxed{\varphi(x) = \mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi(x) - i\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi(ix)}$$

et donc φ est **identiquement nulle si et seulement si $\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi$ est identiquement nulle**.

Supposons que $\varphi : X \to \mathbb{K}$ soit une forme $\mathbb{K}$-linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecrivons comme il est d'usage $\{\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi = \alpha\}$, $\{\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi \leq \alpha\}$ etc pour $\{x \in X : \mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi(x) = \alpha\}$, $\{x \in X : \mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi(x) \leq \alpha\}$. Soient deux sous-ensembles non vides A et B de X. On dit pour $\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi$ **non identiquement nulle** que l'hyperplan **réel** $H := \{\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi = \alpha\}$ **sépare largement** ces deux ensembles quand

$$A \subset \{\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi \leq \alpha\} \quad \text{et} \quad B \subset \{\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi \geq \alpha\}.$$

S'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$A \subset \{\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi \leq \alpha - \varepsilon\} \quad \text{et} \quad B \subset \{\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi \geq \alpha + \varepsilon\},$$

on dit que l'hyperplan réel H **sépare strictement** les deux ensembles.

Le lemme ci-dessous nous permettra d'établir le premier théorème de séparation de Hahn-Banach.

Lemme 12.1 *Soit C un ensemble* **convexe et ouvert** *non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{O})$ et soit un point $b \notin C$. Alors il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue $\varphi : X \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) < \varphi(b)$ pour tout $x \in C$.*

Démonstration. Fixons un point $c \in C$ et observons que $D := -c + C$ est un convexe ouvert avec $0_X \in D$ et $a := b - c \notin D$. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}a \to \mathbb{R}$ avec $f(ta) := t j_D(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où j_D désigne la jauge de D. Cette fonction f est $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{R}a$ et on vérifie sans difficulté (**Exer**) que $f(ta) \leq j_D(ta)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après le théorème analytique de Hahn-Banach on peut prolonger f en une forme $\mathbb{R}$-linéaire φ sur X telle que $\varphi(x) \leq j_D(x)$ pour tout $x \in X$. Nous savons que la fonction jauge j_D est continue car le convexe ouvert D contient 0_X (voir (a) du lemme 10.12) et ceci entraine (**Exer**) la continuité de la forme $\mathbb{R}$-linéaire φ. L'assertion (b) du même lemme 10.12 nous dit que $D = \{x \in X : j_D(x) < 1\}$, ce qui entraine $j_D(a) \geq 1$ car $a \notin D$. Il en résulte pour tout $x \in D$ que $\varphi(x) \leq j_D(x) < 1 \leq j_D(a) = f(a) = \varphi(a)$. Ainsi pour tout $x \in C$ nous obtenons $\varphi(-c + x) < \varphi(b - c)$, i.e. $\varphi(x) < \varphi(b)$. ■

Théorème 12.2 (Théorème de séparation de Hahn-Banach : première version) *Soient $(X, \mathcal{O})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique et A et B deux ensembles non vides,* **convexes et disjoints** *avec A* **$\mathcal{O}$-ouvert**. *On a les propriétés de séparation suivantes.*
(a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors il existe une forme **$\mathbb{R}$-linéaire continue non nulle** *$\varphi : X \to \mathbb{R}$ et un* **réel** *α tels que*

$$A \subset \{\varphi < \alpha\} \quad \text{et} \quad B \subset \{\varphi \geq \alpha\}.$$

(b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors il existe une forme **$\mathbb{C}$-linéaire continue** *$\varphi : X \to \mathbb{C}$* **de partie réelle $\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi$ non nulle** *et un* **réel** *α tels que*

$$A \subset \{\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi < \alpha\} \quad \text{et} \quad B \subset \{\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi \geq \alpha\}.$$

Démonstration. (a) Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Le convexe $C := A - B$ (où $A - B := \{x - y : x \in A, y \in B\}$) est ouvert (**Exer**) et $0_X \notin C$. Le lemme ci-dessus dit qu'il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue $\varphi : X \to \mathbb{R}$ telle $\varphi(x) < \varphi(0) = 0$ pour tout $x \in C$. Par conséquent, pour tous $x \in A$ et $y \in B$ nous avons $\varphi(x) < \varphi(y)$ et donc $\sup_{x \in A} \varphi(x) \leq \inf_{y \in B} \varphi(y)$ et les deux membres de cette inégalité sont dans $\mathbb{R}$. En choisissant un réel α entre ces deux membres, nous obtenons $\varphi(x) \leq \alpha$ pour tout $x \in A$ et $\varphi(y) \geq \alpha$ pour tout $y \in B$. Comme φ n'est pas identiquement nulle, le lemme 12.3 ci-dessous nous dit qu'en fait $\varphi(x) < \alpha$ pour tout $x \in A$. D'où le résultat de séparation dans (a).
(b) Soit maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. L'espace $(X, \mathcal{O})$ est aussi en particulier un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique et donc il existe d'après (a) une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue non nulle $\psi : X \to \mathbb{R}$ telle que $A \subset \{\psi < \alpha\}$ et $B \subset \{\psi \geq \alpha\}$. Considérons la fonction $\varphi : X \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(x) = \psi(x) - i\psi(ix)$ pour tout $x \in X$ et observons que pour $x \in X$ fixé quelconque on a $\varphi(rx) = r\varphi(x)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ et

$$\varphi(ix) = \psi(ix) - i\psi(-x) = i[-i\psi(ix) - \psi(-x)] = i[\psi(x) - i\psi(ix)] = i\varphi(x).$$

On en déduit aisément (**Exer**) que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ et donc φ est $\mathbb{C}$-linéaire car l'additivité est évidente (**Exer**). La fonction φ étant de plus clairement continue, elle est une forme $\mathbb{C}$-linéaire continue de X dans $\mathbb{C}$ et d'après la définition de φ on a $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi = \psi$, donc $A \subset \{\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi < \alpha\}$ et $B \subset \{\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi \geq \alpha\}$. La démonstration est donc terminée. ■

Lemme 12.3 *Soient $(X, \mathcal{O})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique et $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une* **forme $\mathbb{R}$-linéaire continue non nulle**. *Alors pour tout ouvert non vide U de X, la fonction φ n'atteint pas sa borne supérieure sur U.*

Démonstration. Supposons que φ atteigne sa borne supérieure sur l'ouvert U en un point $a \in U$. Comme φ n'est pas identiquement nulle, il existe un élément $x_0 \in X$ tel que $\varphi(x_0 + a) \neq 0$. Alors φ atteint aussi sa borne supérieure sur l'ouvert $V := x_0 + U$ au point $x_0 + a$. Comme $t(x_0 + a) \to x_0 + a \in V$ quand $t \to 1$, il existe un réel $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $t(x_0 + a) \in V$ pour tout $t \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ et donc en particulier $(1 - \varepsilon)(x_0 + a) \in V$ et $(1 + \varepsilon)(x_0 + a) \in V$. De plus des deux nombres réels $\varphi((1 - \varepsilon)(x_0 + a)) = (1 - \varepsilon)\varphi(x_0 + a)$ et $\varphi((1 + \varepsilon)(x_0 + a)) = (1 + \varepsilon)\varphi(x_0 + a)$, l'un est strictement supérieur à $\varphi(x_0 + a)$ (car $\varphi(x_0 + a) \neq 0$). Ceci contredit le fait que φ atteigne sa borne supérieure sur V en $x_0 + a$. D'où le résultat du lemme. ■

Le second théorème de séparation de Hahn-Banach concerne le cas d'un convexe compact et d'un convexe fermé disjoints.

Théorème 12.4 *(***Théorème de séparation de Hahn-Banach : seconde version***) Soient $(X, \mathcal{O})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel* **localement convexe**, *A un convexe $\mathcal{O}$-compact non vide de X et B un convexe $\mathcal{O}$-fermé non vide de X avec $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe une forme* **$\mathbb{K}$-linéaire continue** *$\varphi : X \to \mathbb{K}$ et deux* **réels** *α et ε avec $\varepsilon > 0$ tels que*

$$A \subset \{\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi \leq \alpha - \varepsilon\} \quad \text{et} \quad B \subset \{\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi \geq \alpha + \varepsilon\}.$$

(Noter que $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi$ est évidemment non identiquement nulle).

Démonstration. L'ensemble $A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$ est convexe avec $0 \notin A - B$ car $A \cap B = \emptyset$. On vérifie aussi (**Exer**) qu'il est $\mathcal{O}$-fermé à cause de la compacité de A et du caractère fermé de B. Par conséquent il existe un voisinage V de 0_X tel que $V \cap (A - B) = \emptyset$. Fixons un voisinage ouvert convexe équilibré U de 0_X tel que $U + U \subset V$. Alors $(U + U) \cap (A - B) = \emptyset$ et donc $(A + U) \cap (B + U) = \emptyset$. Comme $B + U$ est convexe et $A + U$ est convexe ouvert (**Exer :**

le vérifier), le premier théorème de séparation de Hahn-Banach nous dit qu'il existe une forme $\mathbb{K}$-linéaire continue $\varphi : X \to \mathbb{K}$ avec $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi$ non identiquement nulle et un réel $\alpha > 0$ tels que $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(x+u) \leq \alpha \leq \mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(y+v)$ pour tous $x \in A$, $y \in B$ et $u, v \in U$. Comme $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi$ n'est pas identiqument nulle il existe (**Exer**) un $u_0 \in U$ tel que $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(u_0) > 0$ et donc pour $u = u_0$ et $v = -u_0$ on déduit de ce qui précède que pour tous $x \in A$ et $y \in B$ on a

$$\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(x) \leq \alpha - \mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(u_0) \leq \alpha + \mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(u_0) \leq \mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(y).$$

Il suffit donc de choisir $\varepsilon := \mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(u_0)$ pour obtenir le résultat du théorème. ■

Parfois on dit **première (resp. seconde) version géométrique** du théorème de Hahn-Banach au lieu de premier (resp. second) théorème de séparation de Hahn-Banach.

Remarque. Dans les deux théorèmes de séparation ci-dessus il y a une hypothèse sur le convexe A. Signalons que deux convexes disjoints d'un espace vectoriel de **dimension finie** peuvent toujours (sans autre hypothèse) être séparés largement par un hyperplan réel (associé à une forme linéaire non nulle). ■

Le prochain résultat est un corollaire du second théorème de séparation de Hahn-Banach.

Corollaire 12.5 *Soient* $(X, \mathcal{O})$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* **localement convexe***. Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Pour tout $\mathbb{K}$*-sous-espace vectoriel* E *de* X *et tout* $a \notin \mathrm{adh}_{\mathcal{O}}E$*, il existe une forme* $\mathbb{K}$*-linéaire* $\mathcal{O}$*-continue* $\varphi : X \to \mathbb{K}$ *nulle sur* E *et non nulle au point* a*.*
(b) Un $\mathbb{K}$*-sous-espace vectoriel* E *de* X *est* $\mathcal{O}$*-dense dans* X *si et seulement si toute forme* $\mathbb{K}$*-linéaire* $\mathcal{O}$*-continue sur* X *nulle sur* E *est nulle sur* X *tout entier.*

Démonstration. (a) Comme $F := \mathrm{adh}_{\mathcal{O}}E$ est un convexe fermé et $\{a\}$ est un convexe compact de X avec $\{a\} \cap F = \emptyset$, il existe d'après le second théorème de séparation de Hahn-Banach une forme $\mathbb{K}$-linéaire continue $\varphi : X \to \mathbb{K}$ et deux réels α, ε avec $\varepsilon > 0$ tels que $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(x) \leq \alpha$ pour tout $x \in F \supset E$ et $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(a) \geq \alpha + \varepsilon$. Comme $0_X \in E$, on a $0 = \mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(0_X) \leq \alpha$ et donc $\alpha + \varepsilon > 0$, ce qui assure que $\varphi(a) \neq 0$. Fixons maintenant $x \in E$ et observons que tout réel $t > 0$ nous avons $tx \in E$ et $-tx \in E$, donc $t\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(x) = \mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(tx) \leq \alpha$ et $-t\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(x) = \mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(-tx) \leq \alpha$, ce qui équivaut à $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(x) \leq t^{-1}\alpha$ et $-t^{-1}\alpha \leq \mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(x)$. En faisant $t \to +\infty$ nous obtenons $0 \leq \mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(x)$ et $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(x) \leq 0$, i.e. $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la démonstration est terminée. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors l'égalité $\varphi(x) = \mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(x) - i\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(ix)$ nous assure que $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in E$. L'assertion (a) est donc établie.
(b) L'assertion (b) découle directement de (a). ■

13 Dual topologique et topologie faible

Nous allons nous intéresser aux formes $\mathbb{K}$-linéaires qui sont $\mathcal{O}$-continues sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{O})$. Evidemment c'est un K-espace vectoriel.

Définition 13.1 *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel topologique. Le* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de toutes les formes* $\mathbb{K}$*-linéaires continues de* X *dans* $\mathbb{K}$ *est appelé* **l'espace dual topologique** *ou* **le dual topologique** *de* $(X, \mathcal{O})$*. On le note* $(X, \mathcal{O})^*$ *ou* $\mathrm{Dual}_{\mathcal{O}}(X)$ *quand l'on veut préciser la topologie de* *l'espace dont on considère le dual topologique. On le notera le plus souvent*[1] X^* *si aucune confusion n'est possible.*

Un élément générique de X est en général noté x ou y etc. Pour des raisons de commodité d'écriture qui apparaitront plus loin, on note souvent x^* ou y^* etc un élément générique de X^* et x_0^* ou y_0^* ou a^* etc un élément d'intérêt de X^*.

$$\boxed{\textbf{Observer bien qu'il n'y a aucune relation entre } x^* \textbf{ et } x \textbf{ etc}}.$$

Pour $x \in X$ et $x^* \in X^*$ on notera souvent $\langle x^*, x\rangle_{X^*,X}$ ou $\langle x^*, x\rangle$ **l'image** de x par la forme $\mathbb{K}$-linéaire x^*, i.e.

$$\boxed{\langle x^*, x\rangle := x^*(x)}.$$

On dit que $\langle \cdot, \cdot\rangle_{X^*,X}$ est le **crochet de dualité entre X et X^***.

La définition ci-dessus conduit à se demander quelle condition générale assure que le dual topologique n'est pas réduit à zéro, i.e à la forme $\mathbb{K}$-linéaire nulle ?. Signalons tout d'abord qu'il existe des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels topologiques séparés (Hausdorff) non localement convexes dont les duaux topologiques sont réduits à zéro. Supposons maintenant que $(X, \mathcal{O})$ soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique **localement convexe et séparé (Hausdorff)** non réduit à zéro (i.e. $X \neq \{0_X\}$). En fixant $a \neq 0_X$ dans X, il existe un voisinage ouvert convexe U de 0_X avec $a \notin U$, i.e. $\{a\} \cap U = \emptyset$. Comme $\{a\}$ est fermé puisque X est séparé (Hausdorff) et comme il est de plus convexe, le premier théorème de séparation de Hahn-Banach nous dit qu'il existe une forme $\mathbb{K}$-linéaire continue φ de X dans $\mathbb{K}$ dont la fonction partie réelle $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi$ est **non nulle** et un réel α tel que $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(a) \geq \alpha$ et $U \subset \{\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi < \alpha\}$. Comme $0_X \in U$, on a nécessairement $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(a) \neq 0$. Ceci nous dit en particulier que le dual topologique de $(X, \mathcal{O})$ est non réduit à zéro et que $\varphi(a) \neq 0$.

Nous avons donc démontré la proposition suivante.

Proposition 13.2 *Soit $(X, \mathcal{O})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel* **localement convexe et séparé (Hausdorff)**. *Alors son dual topologique est non réduit à zéro. Plus précisément, pour tout $x \neq 0_X$ il existe un $x^* \in X^*$ tel que $\langle x^*, x\rangle = x^*(x) \neq 0$.*

Ce qui précède nous conduit à nous intéresser essentiellement au dual topologique d'un espace localement convexe séparé (Hausdorff).

Soit donc $(X, \mathcal{O})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **localement convexe séparé (Hausdorff)**. Alors son dual topologique $X^* := (X, \mathcal{O})^*$ est non réduit à zéro. A chaque $u^* \in X$ associons la semi-norme notée p_{u^*} de X dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{p_{u^*}(x) := |u^*(x)| = |\langle u^*, x\rangle| \quad \text{pour tout } x \in X}.$$

Définition 13.3 *La topologie engendrée sur X par la famille de semi-normes $(p_{u^*})_{u^* \in X^*}$ est en général notée*[2] $w(X, X^*)$ *ou* $\sigma(X, X^*)$. *Compte tenu de la proposition 13.4 ci-dssous, on dit que cette topologie $w(X, X^*)$ est la* **topologie faible** *ou* **topologie affaiblie** *de X.*

1. Nous signalons que X^* est la notation américaine et que dans les livres français on trouve souvent la notation X', réservant plutôt la notation X^* au dual algébrique. Il n' y aura pas d'ambiguité ici car nous ne travaillerons qu'avec des espaces vectoriels topologiques.

2. La notation $w(X, X^*)$ est la notation américaine, "w" étant la première lettre du mot anglais "weak" qui signifie "faible". La notation $\sigma(X, X^*)$ est celle que l'on trouve assez souvent dans les livres français.

Proposition 13.4 *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* **localement convexe séparé (Hausdorff)**. *Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) On a $w(X, X^*) \subset \mathcal{O}$.
(b) La topologie $w(X, X^*)$ *est* **séparée (Hausdorff)**.

Démonstration. (a) Soit $u^* \in X^*$, $a \in X$ et $r > 0$ quelconques. Comme $u^* : X \to \mathbb{K}$ est $\mathcal{O}$-continue, l'ensemble $\{x \in X : |u^*(x-a)| < r\} \in \mathcal{O}$, i.e. $B_{p_{u^*}}(a; r) \in \mathcal{O}$. Ainsi toutes les p_{u^*}-semi-boules ouvertes de X appartiennent à $\mathcal{O}$ et donc $w(X, X^*) \subset \mathcal{O}$.
(b) Pour chaque $x \in X$ avec $x \neq 0_X$, la proposition ci-dessus nous dit qu'il existe un $u^* \in X^*$ tel que $\langle u^*, x\rangle \neq 0$ et donc $p_{u^*}(x) \neq 0$. La caractérisation de la propriété séparée (Hausdorff) d'une topologie engendrée par une famille de semi-normes nous assure que $w(X, X^*)$ (i.e. la topologie engendrée par la famille de semi-normes $(p_{u^*})_{u^* \in X^*}$) est séparée (Hausdorff). ∎

La convergence de suite généralisée peut être traduite comme suit.

Proposition 13.5 *(***Caractérisation de la convergence faible***) Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* **localement convexe séparé (Hausdorff)**. *Une suite généralisée* $(x_j)_{j \in J}$ **converge faiblement** *ou* $w(X, X^*)$**-converge** *vers un élément* $x \in X$ *(i.e.* $x_j \xrightarrow[j \in J]{w(X,X^*)} x$*) si et seulement si* **pour chaque** $x^* \in X^*$ *on a*

$$\boxed{\langle x^*, x_j\rangle \underset{j \in J}{\longrightarrow} \langle x^*, x\rangle \quad \textit{dans } \mathbb{K}}.$$

Démonstration. Par propriété de convergence dans un espace localement convexe engendré par une famille de semi-normes on a on a $x_j \xrightarrow[j \in J]{w(X,X^*)} x$ dans X si et seulement si pour chaque $x^* \in X^*$ on a $p_{x^*}(x_j - x) \underset{j \in J}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathbb{R}$, i.e. $|\langle x^*, x_j - x\rangle| \underset{j \in J}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathbb{R}$. Ceci équivaut à dire que pour chaque $x^* \in X^*$ on a $\langle x^*, x_j - x\rangle \underset{j \in J}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathbb{K}$, i.e. $\langle x^*, x_j\rangle \underset{j \in J}{\longrightarrow} \langle x^*, x\rangle$ dans $\mathbb{K}$. D'où l'équivalence de la proposition. ∎

Parfois au lieu de $x_j \xrightarrow[j \in J]{w(X,X^*)} x$ on abrègera la notation de la $w(X, X^*)$-convergence ou convergence faible de $(x_j)_{j \in J}$ vers x dans X en $x_j \xrightarrow[j \in J]{w} x$.

Proposition 13.6 *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* **localement convexe séparé (Hausdorff)**. *Alors une forme* $\mathbb{K}$*-linéaire* $\varphi : X \to \mathbb{K}$ *est* $\mathcal{O}$*-continue si et seulement si elle est* $w(X, X^*)$*-continue (i.e. si et seulement si elle est faiblement continue).*

Par conséquent, le dual topologique $(X, w(X, X^*))^*$ *de* $(X, w(X, X^*))$ **coincide avec** X^* *dual topologique de* $(X, \mathcal{O})$*, ce que l'on peut écrire sous la forme*

$$(X, w(X, X^*))^* = (X, \mathcal{O})^*.$$

Démonstration. Comme $w(X, X^*) \subset \mathcal{O}$ (d'après la proposition 13.4), toute forme $\mathbb{K}$-linéaire de X dans $\mathbb{K}$ qui est $w(X, X^*)$-continue est $\mathcal{O}$-continue. Soit maintenant $\varphi : X \to \mathbb{K}$ une forme $\mathbb{K}$-linéaire qui est $\mathcal{O}$-continue. Alors pour $a^* := \varphi \in X^*$ on a

$$|\varphi(x)| = |a^*(x)| = 1 \cdot p_{a^*}(x) \quad \text{pour tout } x \in X,$$

ce qui entraîne que la forme $\mathbb{K}$-linéaire φ est continue pour la topologie engendrée par la famille de semi-normes $(p_{u^*})_{u^* \in X^*}$ d'après la caractérisation d'applications linéaires continues entre espaces localement convexes dont les topologies sont engendrées par des semi-normes données (voir le théorème 10.8). L'équivalence de la proposition est établie. ∎

Comparons maintenant les ensembles convexes fermés pour la topologie localement convexe initiale $\mathcal{O}$ sur X et la topologie faible. Tout ensemble $w(X, X^*)$-fermé est évidemment $\mathcal{O}$-fermé car $w(X, X^*) \subset \mathcal{O}$, mais la réciproque est fausse en général. Toutefois on a le **théorème important** de Mazur suivant (appelé aussi parfois lemme de Mazur).

Théorème 13.7 *(***Théorème de Mazur relatif aux convexes faiblement fermés***) Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* **localement convexe séparé (Hausdorff)***. Alors les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Tout ensemble convexe $\mathcal{O}$*-fermé non vide de* X *est l'intersection des demi-espaces* $\mathcal{O}$*-fermés qui le contiennent.*
(b) Un sous-ensemble **convexe C de X est $w(X, X^*)$-fermé si et seulement s'il est $\mathcal{O}$-fermé**.
(c) Supposons que la topologie $\mathcal{O}$ *soit métrisable (c'est en particulier le cas si* $\mathcal{O}$ *est la* **topologie d'un espace normé***). Alors pour toute* **suite ordinaire** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* X *qui* $w(X, X^*)$*-converge vers un point* $x \in X$*, il existe pour chaque entier* $n \in \mathbb{N}$ *un entier* $K_n \geq n$ *et des* **réels** $\alpha_{n,n}, \cdots, \alpha_{K_n,n} \in [0, 1]$ *avec* $\sum_{k=n}^{K_n} \alpha_{k,n} = 1$ *tels que pour* $u_n := \sum_{k=n}^{K_n} \alpha_{k,n} x_k$ *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{O}$*-converge vers* x*. Ceci dit en particulier que* x *est la* $\mathcal{O}$*-limite d'une suite de combinaisons convexes des* x_k*.*

Démonstration. (a) Soit C un convexe $\mathcal{O}$-fermé et soit $a \in X$ avec $a \notin C$. Le second théorème de séparation de Hahn-Banach nous dit qu'il existe une forme $\mathbb{K}$-linéaire $\mathcal{O}$-continue non nulle $\varphi : X \to \mathbb{K}$ et un réel α tel que $C \subset \{\mathcal{R}e\,\varphi \leq \alpha\}$ et $\mathcal{R}e\,\varphi(a) > \alpha$. Par conséquent, a n'appartient pas à l'intersection de la famille des demi-espaces $\mathcal{O}$-fermés contenant C.

Inversement, si $a \in C$, alors évidemment a appartient à l'intersection des demi-espaces $\mathcal{O}$-fermés contenant C. D'où l'égalité de (a).
(b) Supposons que le convexe C soit $\mathcal{O}$-fermé. Tout demi-espace $\mathcal{O}$-fermé $\{\mathcal{R}e\,\varphi \leq \alpha\}$ est $w(X, X^*)$-fermé car d'après la proposition précédente la forme $\mathbb{K}$-linéaire $\mathcal{O}$-continue φ est $w(X, X^*)$-continue. Il découle de (a) que C est $w(X, X^*)$-fermé. D'où (b) car l'implication inverse est immédiate.
(c) Soit d une distance sur X dont la topologie associée coincide avec la topologie $\mathcal{O}$. Notons adh_w l'adhérence relativement à la topologie $w(X, X^*)$. D'après l'hypothèse, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$x \in \mathrm{adh}_{w(X,X^*)}(\{x_k : k \geq n\}) \subset \mathrm{adh}_{w(X,X^*)}(\mathrm{co}\,\{x_k : k \geq n\}) = \mathrm{adh}_{\mathcal{O}}(\mathrm{co}\,\{x_k : k \geq n\}),$$

l'égalité découlant de (b) ci-dessus. Alors pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ nous pouvons choisir $u_n \in \mathrm{co}\,\{x_k : k \geq n\}$ tel que $d(u_n, x) < \frac{1}{n+1}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge suivant la topologie $\mathcal{O}$ vers x et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $\alpha_{n,n}, \cdots, \alpha_{K_n,n} \in [0, 1]$ avec $\sum_{k=n}^{K_n} \alpha_{k,n} = 1$ tels que $u_n := \sum_{k=n}^{K_n} \alpha_{k,n} x_k$. Ceci termine la démonstration. ■

14 Topologie étoile faible

Soient $(X, \mathcal{O})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel localement convexe séparé (Hausdorff) et soit X^* son dual topologique, i.e. $X^* := (X, \mathcal{O})^*$. Comme dans le paragraphe précédent, à chaque $u \in X$ on peut asscocier la semi-norme q_u sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel X^* définie par

$$\boxed{q_u(x^*) := |x^*(u)| = |\langle x^*, u\rangle| \quad \text{pour tout } x^* \in X^*}.$$

Définition 14.1 *La topologie engendrée sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel X^* par la famille de semi-normes $(q_u)_{u\in X}$ est appelée la* **topologie étoile faible ou faible étoile** *de X^*. On la note en général $w(X^*,X)$ ou $\sigma(X^*,X)$.*

Souvent on abrège en écrivant : **topologie $*$-faible ou faible-$*$ ou w^*-topologie**. De même on écrit parfois $x_j^* \xrightarrow[j\in J]{w^*} x^*$ au lieu $x_j^* \xrightarrow[j\in J]{w(X^*,X)} x^*$ pour exprimer la $w(X^*,X)$-convergence d'une suite généralisée $(x_j^*)_{j\in J}$ de X^* vers un élément $x^* \in X^*$.

Proposition 14.2 *(***Caractère séparé Hausdorff et caractérisation de convergence pour la topologie $*$-faible***) Soient $(X,\mathcal{O})$ un espace vectoriel localement convexe séparé (Hausdorff)et X^* son dual topologique. On a les assertions suivantes.*
(a) La topologie localement convexe $w(X^*,X)$ est séparée (Hausdorff).
(b) Une suite généralisée $(x_j^*)_{j\in J}$ converge vers un élément $x^*\in X^*$ suivant la topologie $w(X^*,X)$ (i.e. $x_j^* \xrightarrow[j\in J]{w(X^*,X)} x^*$) si et seulement si

$$\boxed{\text{pour chaque } x\in X \text{ fixé} \quad \langle x_j^*,x\rangle \xrightarrow[j\in J]{} \langle x^*,x\rangle \quad \text{dans } \mathbb{K}}.$$

Démonstration. (a) Pour chaque $x^* \neq 0_{X^*}$ il existe par définition de fonction un $u\in X$ tel que $x^*(u)\neq 0$ et donc $q_u(x^*)\neq 0$. D'après la caractérisation de la propriété séparée (Hausdorff) d'une topologie engendrée par une famille de semi-normes, la topologie $w(X^*,X)$ est séparée (Hausdorff).
(b) On procède comme pour la topologie faible (**Exer**). ■

Maintenant que nous avons muni le dual topologique de la topologie $*$-faible, étudions le dual topologique d'un produit.

Théorème 14.3 *Soient $(X_1,\mathcal{O}_1),\cdots,(X_m,\mathcal{O}_m)$ un nombre* **fini** *de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels localement convexes séparés (Hausdorff) et soit $\mathcal{O}$ la topologie produit (qui est aussi localement convexe séparé (Hausdorff)) sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $X := X_1\times\cdots X_m$. Notons π_i l'application i-ième projection de $X_1\times\cdots\times X_m$ sur X_i et notons X_i^* le dual topologique de $(X_i,\mathcal{O}_i)$, i.e. $X_i^* := (X,\mathcal{O}_i)^*$. Alors l'application Φ qui à $(x_1^*,\cdots,x_m^*)$ associe $x_1^*\circ\pi_1+\cdots+x_m^*\circ\pi_m$ est* **linéaire et bijective** *de $X_1^*\times\cdots\times X_m^*$ sur $X^* := (X_1\times\cdots\times X_m,\mathcal{O})^*$, dual topologique de $(X_1\times\cdots\times X_m,\mathcal{O})$. De plus, si l'on note τ la topologie produit des topologies $w(X_i^*,X_i)$, l'application Φ est $(\tau,w(X^*,X))$-***bicontinue***. Elle permet donc d'identifier $(X_1\times\cdots\times X_m,\mathcal{O})^*$ et $X_1^*\times\cdots\times X_m^*$, i.e. $\Phi(x_1^*,\cdots,x_m^*)\equiv(x_1^*,\cdots,x_m^*)$ et*

$$\boxed{(X_1\times\cdots\times X_m,\mathcal{O})^*\equiv X_1^*\times\cdots\times X_m^*}.$$

De plus

$$\boxed{\langle\phi(x_1^*,\cdots,x_m^*),(x_1,\cdots,x_m)\rangle_{X^*,X} = \langle x_1^*,x_1\rangle_{X_1^*,X_1}+\cdots+\langle x_m^*,x_m\rangle_{X_m^*,X_m}}$$

et donc à travers l'identification ci-dessus on a

$$\boxed{\langle(x_1^*,\cdots,x_m^*),(x_1,\cdots,x_m)\rangle_{X^*,X} = \langle x_1^*,x_1\rangle_{X_1^*,X_1}+\cdots+\langle x_m^*,x_m\rangle_{X_m^*,X_m}}$$

Démonstration. Pour chaque $(x_1^*,\cdots,x_m^*)$ nous observons que $x_1^*\circ\pi_1+\cdots+x_m^*\circ\pi_m$ est une forme $\mathbb{K}$-linéaire $\mathcal{O}$-continue (**Exerc**) sur X et donc en posant $\Phi(x_1^*,\cdots,x_m^*) := x_1^*\circ\pi_1+\cdots+x_m^*\circ\pi_m$ nous définissons une application de $X_1^*\times\cdot\times X_m^*$ dans X^*. Cette application Φ est évidemment

$\mathbb{K}$-linéaire (**Exer**) et son noyau est réduit à zéro (**Exer**), donc elle est injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit $h \in X^*$, i.e. $h : X_1 \times \cdots \times X_m \to \mathbb{K}$ est une forme $\mathbb{K}$-linéaire $\mathcal{O}$-continue. Pour chaque $i = 1, \cdots, m$ l'application $j_i : X_i \to X$ avec $j_i(u) := (0, \cdots, 0, u, 0, \cdots, 0)$ (l'élément u figurant à la i-ième coordonnée) étant $\mathbb{K}$-linéaire $(\mathcal{O}_i, \tau)$-continue (**Exer**), la fonction $h \circ j_i$ de X_i dans $\mathbb{K}$ est $\mathbb{K}$-linéaire $\mathcal{O}_i$-continue et donc nous pouvons poser $v_i^* := h \circ j_i \in X_i^*$, i.e. $(v_1^*, \cdots, v_2^*) \in X_1^* \times \cdots \times X_m^*$. Il est facile de voir (**Exer**) que $\Phi(v_1^*, \cdots, v_m^*) = h$, d'où la surjectivité de Φ.

Par ailleurs, il n'est pas difficile de vérifier l'égalité

$$\langle \Phi(x_1^*, \cdots, x_m^*), (x_1, \cdots, x_m) \rangle_{X^*,X} = \langle x_1^*, x_1 \rangle_{X_1^*,X_1} + \cdots + \langle x_m^*, x_m \rangle_{X_m^*,X_m},$$

de l'énoncé (**Exer**). ■

Examinons le dual topologique de $(X^*, w(X^*, X))$.

Théorème 14.4 *Soit $(X, \mathcal{O})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel* **localement convexe séparé (Hausdorff)** *et soit X^* son dual topologique. Pour chaque $x \in X$ fixé soit $\Phi(x)(x^*) := x^*(x)$ pour tout $x^* \in X^*$. Alors pour chaque $x \in X$ fixé $\Phi(x)$ est une forme $\mathbb{K}$-linéaire $w(X^*, X)$-continue sur X^*, i.e. $\Phi(x) \in \mathrm{Dual}_{w(X^*,X)}(X^*)$. De plus l'application Φ de X dans $Y := \mathrm{Dual}_{w(X^*,X)}(X^*)$ est* **linéaire, bijective** *et $(w(X, X^*), w(Y, X^*))$-***bicontinue***. Cette application Φ permet donc d'identifier le dual topologique de $(X^*, w(X^*, X))$ à X, i.e. $\Phi(x) \equiv x$ et*

$$\boxed{(X^*, w(X^*, X))^* = \mathrm{Dual}_{w(X^*,X)}(X^*) \equiv X}.$$

De plus,

$$\boxed{\langle \Phi(x), x^* \rangle_{Y,X^*} = \langle x^*, x \rangle_{X^*,X}}.$$

Démonstration. A chaque $u \in X$ associons la semi-norme q_u sur X^* définie par $q_u(x^*) := |x^*(u)|$ pour tout $x^* \in X^*$ et a chaque $u^* \in X^*$ associons la semi-norme p_{u^*} sur X définie par $p_{u^*}(x) := |u^*(x)|$ pour tout $x \in X$. Pour chaque $x \in X$ fixé la fonction $\Phi(x) : X^* \to \mathbb{K}$ est évidemment $\mathbb{K}$-linéaire (**Exer**) et nous avons $|\Phi(x)(x^*)| = |x^*(x)| = 1 \cdot q_x(x^*)$ pour tout $x^* \in X^*$, et donc la forme $\mathbb{K}$-linéaire $\Phi(x)$ est $w(X^*, X)$-continue, i.e. $\Phi(x) \in Y := \mathrm{Dual}_{w(X^*,X)}(X^*)$ et Φ définit une application de X dans $Y := \mathrm{Dual}_{w(X^*,X)}(X^*)$. On vérifie facilement (**Exer**) que cette application Φ est $\mathbb{K}$-linéaire.

A chaque $u^* \in X^*$ associons maintenant la semi-norme ρ_{u^*} sur $Y := \mathrm{Dual}_{w(X^*,X)}(X^*)$ définie par

$$\rho_{u^*}(h) := |h(u^*)| \quad \text{pour tout } h \in Y := \mathrm{Dual}_{w(X^*,X)}(X^*).$$

On observe que pour chaque $u^* \in X^*$ on a

$$\rho_{u^*}(\Phi(x)) = |\Phi(x)(u^*)| = |u^*(x)| = 1 \cdot p_{u^*}(x) \quad \text{pour tout } x \in X, \tag{14.1}$$

et donc l'application linéaire $\Phi : X \to Y := \mathrm{Dual}_{w(X^*,X)}(X^*)$ est $(w(X, X^*), w(Y, X^*))$-continue.

Montrons que $\Phi : X \to Y := \mathrm{Dual}_{w(X^*,X)}(X^*)$ est surjective. Fixons $h \in Y := \mathrm{Dual}_{w(X^*,X)}(X^*)$ quelconque, i.e. $h : X^* \to \mathbb{K}$ est $\mathbb{K}$-linéaire et $w(X^*, X)$-continue. D'après la caractérisation d'applications linéaires continues entre des espaces localement convexes définis par des semi-normes, il existe un réel $\gamma > 0$, un entier $n \geq 1$ et des éléments $u_1, \cdots, u_n \in X$ tels que

$$|h(x^*)| \leq \gamma \max_{1 \leq k \leq n} p_{u_k}(x^*) = \gamma \max_{1 \leq k \leq n} |\Phi(u_k)(x^*)| \quad \text{pour tout } x^* \in X^*,$$

ce qui assure que $\bigcap_{k=l}^{n} \mathrm{Ker}\Phi(u_k) \subset \mathrm{Ker}\, h$. Le lemme ci-dessous nous dit qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $h = \lambda_1\Phi(u_1) + \cdots + \lambda_n\Phi(u_n)$, ce qui signifie que $h = \Phi(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n)$. Ceci nous assure la surjectivité de Φ et donc l'application linéaire Φ est bijective.

En utilisant la suite des égalités (14.1) on montre (**Exer**) sans difficulté que l'application réciproque de Φ est $(w(Y, X^*), w(X, X^*))$-continue. D'où la bicontinuité de Φ.

Enfin d'après la définition de Φ on a

$$\langle \Phi(x), x^* \rangle_{Y,X^*} = \Phi(x)(x^*) = x^*(x) = \langle x^*, x \rangle_{X^*,X}.$$

La démonstration est terminée. ■

Le lemme algébrique **important** ci-dessous utilisé dans la démonstration de la proposition précédente intervient dans bon nombre d'autres résultats d'algèbre et d'analyse.

Lemme 14.5 *Soient $\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_m : X \to \mathbb{K}$ un nombre fini (ici $m+1$) de* **formes** *$\mathbb{K}$-linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X telles que $\bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\,\varphi_k \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tels que*

$$\boxed{\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_m\varphi_m}.$$

Démonstration. Soit l'application $\mathbb{K}$-linéaire $\Lambda : X \to \mathbb{K}^m$ définie par $\Lambda(x) := (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x))$ pour tout $x \in X$. Si pour deux éléments $x, x' \in X$ nous avons $\Lambda(x) = \Lambda(x')$, alors l'hypothèse sur les noyaux nous assurent que $x - x' \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ et donc $\varphi(x) = \varphi(x')$. Par conséquent nous pouvons définir une fonction

$$\psi : \Lambda(X) \to \mathbb{K} \quad \text{en posant} \quad \psi(v) := \varphi(x) \quad \text{si } v = \Lambda(x).$$

Cette fonction ψ est évidemment $\mathbb{K}$-linéaire (**Exer**) sur le $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel $\Lambda(X)$ du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{K}^m$. Un résultat classique d'algèbre linéaire nous dit que nous pouvons prolonger ψ en une forme $\mathbb{K}$-linéaire $\psi_0 : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$. La description des formes $\mathbb{K}$-linéaires sur $\mathbb{K}^m$ nous fournit des **constantes scalaires** $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ telles que pour tout $y := (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{K}^m$ on ait

$$\psi_0(y) = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_m y_m,$$

ce qui entraîne pour tout $x \in X$ (en prenant $y = (\Lambda_1(x), \cdots, \Lambda_m(x))$)

$$\varphi(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(x).$$

D'où le résultat du lemme. ■

15 Trois théorèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle

Ce paragraphe est consacré pour une grande part à établir trois théorèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle : le théorème de la borne uniforme ou théorème de Banach-Steinhaus, le théorème de l'application ouverte et le théorème du graphe fermé.

15.1 Théorème de Baire

Le théorème suivant intervient dans bon nombre de résultats d'analyse.

Théorème 15.1 *(***Théorème de Baire***) Soit (X, d) un espace* **métrique complet***. Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) L'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ d'une **suite** *(ou famille* **dénombrable***) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts denses de (X, d) est dense dans (X, d).*
(b) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite (ou famille **dénombrable***) de fermés de (X, d) avec $\mathrm{int}_X\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\big) \neq \emptyset$, alors il existe (au moins) un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{int}_X F_{n_0} \neq \emptyset$.*
(c) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite (ou famille **dénombrable***) de fermés de (X, d) recouvrant X, i.e. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$, alors il existe (au moins) un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{int}_X F_{n_0} \neq \emptyset$.*

Démonstration. (a) Soit Ω un ouvert non vide quelconque de X. Par densité de U_0 dans X fixons un point $x_0 \in \Omega \cap U_0$ et fixons aussi un réel $r_0 > 0$ tel que $B[x_0; r_0] \subset \Omega \cap U_0$ (puisque $\Omega \cap U_0$ est ouvert). De même, par densité de U_1 dans X l'ouvert $B(x_0, r_0) \cap U_1$ est non vide et donc nous pouvons choisir $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap U_1$ et un réel r_1 avec $0 < r_1 < r_0/2$ tels que

$$B[x_1; r_1] \subset B(x_0; r_0) \cap U_1.$$

Par récurrence, nous construisons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X et une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ telles que $0 < r_{n+1} < \frac{1}{2} r_n$ et

$$B[x_0; r_0] \subset \Omega \cap U_0 \quad \text{et} \quad B[x_{n+1}; r_{n+1}] \subset B(x_n; r_n) \cap U_{n+1}. \tag{15.1}$$

Comme $d(x_{n+1}, x_n) < \frac{1}{2^n} r_0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace complet (X, d) et donc converge vers un point $x \in X$. Par ailleurs puisque $B[x_{n+1}; r_{n+1}] \subset B[x_n; r_n]$, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ fixé nous avons $x_{n+k} \in B[x_n; r_n]$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et donc en faisant $k \to \infty$ nous obtenons $x \in B[x_n; r_n]$. Ainsi $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B[x_n; r_n] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. De plus nous avons aussi $x \in \Omega$ car $B[x_0; r_0] \subset \Omega$, et donc $x \in \Omega \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)$. La non vacuité de $\Omega \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)$ nous assure que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans X.
(b) L'assertion (b) est équivalente à (a) car on vérifie aisément que (a) équivaut à l'assertion suivante : Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés de X avec $\mathrm{int}_X F_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{int}_X\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\big) = \emptyset$.
(c) L'assertion (c) découle directement de (b). ■

L'importance du résultat ci-dessus a conduit à dire qu'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ a la **propriété de Baire** quand la propriété (a) (qui est équivalente à (b)) du théorème a lieu. Ainsi tout **ouvert** (resp. tout **fermé**) d'un espace métrique complet est un espace topologique de Baire pour la topologie induite (**Exer**). On peut aussi montrer (en adaptant la démonstration du théorème ci-dessus) que tout espace topologique localement compact a la propriété de Baire (**Exer**).

15.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Nous rappelons que pour deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$, la norme naturelle $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(X, Y)$ des applications **$\mathbb{K}$-linéaires continues** de X dans Y est définie pour $\Lambda \in \mathcal{L}(x, Y)$ par

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X \le 1} \|\Lambda(x)\|_Y.$$

Par la suite on notera en général $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ quand il n'y a pas d'ambiguité. On notera aussi $\mathbb{B}_X$ et $\mathbb{U}_X$ les boules fermées et ouvertes respectivement de centre 0_X et de rayon 1, i.e.

$$\boxed{\mathbb{B}_X := B_X[0_X; 1] \quad \text{et} \quad \mathbb{U}_X := B_X(0_X; 1)}.$$

On écrira aussi $\mathbb{B}$ et $\mathbb{U}$ quand il n'y a pas d'ambiguité sur X.

Nous rappelons aussi que $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ est complet quand l'espace d'arrivée $(Y, \|\cdot\|)$ est complet. (La condition est aussi nécessaire si X n'est pas réduit à zéro.)

Théorème 15.2 *(***Théorème de Banach-Steinhaus ou théorème de la borne uniforme***)* *Soient* $(X, \|\cdot\|_X)$ *un* **$\mathbb{K}$-espace de Banach** *et* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soit* $(\Lambda_i)_{i\in I}$ *une famille* **quelconque** *d'applications* **$\mathbb{K}$-linéaires continues** *de X dans Y qui est* **ponctuellement bornée**, *i.e. pour chaque $x \in X$ on a* $\sup_{i\in I} \|\Lambda_i(x)\|_Y < +\infty$.

Alors il existe un réel constant $\gamma \ge 0$ tel que $\sup_{i\in I} \|\Lambda_i\|_{\mathcal{L}} \le \gamma$, *ce qui équivaut à*

$$\|\Lambda(x)\|_Y \le \gamma \|x\|_X \quad \textit{pour tous } i \in I, x \in X.$$

(Ceci revient à dire que la famille des applications $(\Lambda_i)_{i\in I}$ est uniformément bornée sur la **boule unité fermée** *$\mathbb{B}_X$ de X centrée en 0_X).*

Démonstration. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ posons $F_n := \bigcap_{i\in I} \{x \in X : \|\Lambda_i(x)\| \le n\}$. La continuité des Λ_i entraîne que les ensembles F_n sont fermés et l'hypothèse de majoration ponctuelle implique que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$. Le théorème de Baire nous dit qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{int}_X F_{n_0} \ne \emptyset$ et donc nous pouvons choisir un point $x_0 \in X$ et un réel $r > 0$ tel que $x_0 + r\mathbb{B}_X \subset F_{n_0}$, i.e. pour tout $i \in I$ et tout $u \in \mathbb{B}_X$ nous avons $\|\Lambda_i(x_0 + ru)\|_Y \le n_0$, ce qui entraîne que $r\|\Lambda_i(u)\|_Y \le n_0 + \|\Lambda_i(x_0)\|_Y$. Par hypothèse, nous avons $\alpha := \sup_{i\in I} \|\Lambda_i(x_0)\|_Y < \infty$ et donc pour le **réel** $\gamma := (n_0 + \alpha)/r \ge 0$ nous déduisons pour chaque $i \in I$ que $\|\Lambda_i(u)\|_Y \le \gamma$ pour tout $u \in \mathbb{B}_X$ et donc $\|\Lambda_i\|_{\mathcal{L}} \le \gamma$. ■

Le corollaire suivant est relatif à la convergence simple d'une suite d'applications linéaires continues.

Corollaire 15.3 *Soient* $(X, \|\cdot\|_X)$ *un* $\mathbb{K}$**-espace de Banach** *et* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé. Soit* $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une* **suite** *d'applications* $\mathbb{K}$**-linéaires continues** *de* X *dans* Y *qui converge simplement sur* X *vers une application* Λ *de* X *dans* Y.

Alors Λ *est une application linéaire continue,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\Lambda_n\|_{\mathcal{L}} < +\infty \quad \text{et} \quad \|\Lambda\|_{\mathcal{L}} \le \liminf_{n\to\infty} \|\Lambda_n\|_{\mathcal{L}}.$$

Démonstration. L'application Λ est évidemment linéaire et le théorème de Banach-Steinhaus (dont les hypothèses sont vérifiées (**Exer**)) nous dit qu'il existe un réel $\gamma \ge 0$ tel que pour chaque $x \in X$ on ait $\|\Lambda_n(x)\|_Y \le \gamma\|x\|_X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc en faisant $n \to \infty$ on obtient $\|\Lambda(x)\|_Y \le \gamma\|x\|_X$. Ceci nous assure la continuité de l'application linéaire Λ.

Par ailleurs pour chaque $x \in \mathbb{B}_X$ fixé, en écrivant $\|\Lambda_n(x)\| \le \|\Lambda_n\|_{\mathcal{L}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient pour $n \to \infty$ l'inégalité $\|\Lambda(x)\| \le \liminf_{n\to\infty} \|\Lambda_n\|_{\mathcal{L}}$. Par conséquent $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}} \le \liminf_{n\to\infty} \|\Lambda_n\|_{\mathcal{L}}$. ■

15.3 Théorème de l'application ouverte

Dans le théorème de Banach-Steinhaus l'espace normé de départ a été supposé complet. Le théorème ci-dessous demande aux deux espaces de départ et d'arrivée d'être complets. Rappelons au préalable qu'une application d'un premier espace topologique dans un second est **ouverte** quand l'image (directe) de tout ouvert du pemier espace est un ouvert dans le second.

Théorème 15.4 *(***Théorème de l'application ouverte de Banach***) Soient* $(X, \| \, \|_X)$ *et* $(Y, \| \, \|_Y)$ *deux* $\mathbb{K}$**-espaces de Banach**. *Soit* $\Lambda : X \to Y$ *une application* $\mathbb{K}$**-linéaire continue**. *Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes entre elles.*
(a) L'application Λ *est surjective ;*
(b) L'application Λ *est ouverte ;*
(c) Il existe un réel $c > 0$ *tel que* $\boxed{c\,\mathbb{B}_Y \subset \Lambda(\mathbb{B}_X)}$.

Démonstration. $(b) \Leftrightarrow (c)$. Si l'application Λ est ouverte, alors $\Lambda(\mathbb{U}_X)$ est un voisinage de 0_Y et donc il existe un réel $c > 0$ tel que $B[0_Y; c] \subset \Lambda(\mathbb{U}_X)$, ce qui entraîne que $c\,\mathbb{B}_Y \subset \Lambda(\mathbb{B}_X)$.

Supposons maintenant que (c) ait lieu, i.e. $c\,\mathbb{B}_Y \subset \Lambda(\mathbb{B}_X)$. Considérons un ouvert non vide quelconque U de X. Pour $y_0 \in \Lambda(U)$ quelconque fixé, il existe un $x_0 \in U$ tel que $y_0 = \Lambda(x_0)$ et il existe un réel $r > 0$ tel que $x_0 + r\mathbb{B}_X \subset U$. Alors on a

$$y_0 + rc\,\mathbb{B}_Y \subset y_0 + r\Lambda(\mathbb{B}_X) = \Lambda(x_0 + r\mathbb{B}_X) \subset \Lambda(U).$$

Ainsi $\Lambda(U)$ est un voisinage de y_0 et donc $\Lambda(U)$ est ouvert dans Y en tant que voisinage de chacun de ses points. L'équivalence $(b) \Leftrightarrow (c)$ est donc établie.
$(c) \Rightarrow (a)$. Pour tout $y \in Y$ non nul nous avons $\frac{c}{\|y\|_Y} y \in c\,\mathbb{B}_X \subset \Lambda(\mathbb{B}_X)$ et donc il existe un $u \in \mathbb{B}_X$ tel que $\frac{c}{\|y\|_Y} y = \Lambda(u)$, i.e. $y = \Lambda(\frac{1}{c}\|y\|u)$, d'où la surjectivité de Λ.
$(a) \Rightarrow (c)$. Supposons que l'application linéaire continue Λ soit surjective. Nous pouvons évidemment supposer que Y n'est pas réduit à zéro. Alors $Y = \bigcup_{n\ge1} \big(n\,\Lambda(\mathbb{U}_X)\big)$ et donc à fortiori $Y = \bigcup_{n\ge1} \big(n\,\mathrm{adh}_Y\,(\Lambda(\mathbb{U}_X))\big)$. Le théorème de Baire nous dit qu'il existe un n_0 tel que $\mathrm{int}_Y\big(n_0\,\mathrm{adh}_Y\,(\Lambda(\mathbb{U}_X))\big) \ne \emptyset$ et ceci implique que $\mathrm{int}_Y\big(\mathrm{adh}_Y\,(\Lambda(\mathbb{U}_X))\big) \ne \emptyset$. Ainsi il existe $y_0 \in Y$ et $r > 0$ tel que $y_0 + 2r\,\mathbb{U}_Y \subset \mathrm{adh}_Y\,(\Lambda(\mathbb{U}_X))$. En particulier nous avons $y_0 \in \mathrm{adh}_Y\,(\Lambda(\mathbb{U}_X))$ et par symétrie nous avons également $-y_0 \in \mathrm{adh}_Y\,(\Lambda(\mathbb{U}_X))$. Nous en déduisons

$$2r\,\mathbb{U}_Y = (y_0 + 2r\,\mathbb{U}_Y) - y_0 \subset \mathrm{adh}_Y\,(\Lambda(\mathbb{U}_X)) + \mathrm{adh}_Y\,(\Lambda(\mathbb{U}_X)) = 2\,\mathrm{adh}_Y\,(\Lambda(\mathbb{U}_X)),$$

la dernière égalité étant due à la convexité de l'ensemble $\mathrm{adh}_X(\Lambda(\mathbb{B}_X))$. Ceci nous assure que $r\,\mathbb{U}_Y \subset \mathrm{adh}_Y(\Lambda(\mathbb{U}_X))$. Ainsi après application du lemme ci-dessous, on obtient l'assertion (c) en choisissant un réel c quelconque vérifiant $0 < c < r$. ■

Dans ce qui précède seule la complétude de Y a été utilisée. C'est dans le lemme suivant (**dû à Banach**) qu'intervient la complétude de X.

Lemme 15.5 *Soient* $(X, \|\cdot\|_X)$ *un* $\mathbb{K}$**-espace de Banach** *et* $(Y, \|\ \|_Y)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé. Soient une application linéaire continue* $\Lambda : X \to Y$ *et un réel* $r > 0$ *tels que* $r\mathbb{U}_Y \subset \mathrm{adh}_Y\big(\Lambda(\mathbb{U}_X)\big)$. *Alors* $r\mathbb{U}_Y \subset \Lambda(\mathbb{U}_X)$.

Démonstration. Fixons $v \in r\mathbb{U}_Y$ et choisissons $t \in]0,1[$ tel que $\|v\|_Y < r(1-t)$. Observons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'hypothèse du lemme entraîne $rt^k\mathbb{U}_Y \subset \mathrm{adh}_Y\big(\Lambda(t^k\mathbb{U}_X)\big)$, et donc pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque $w \in rt^k\mathbb{U}_Y$ il existe un $u \in X$

$$\|u\|_X < t^k \quad \text{et} \quad \|w - \Lambda(u)\|_Y < \varepsilon. \tag{15.2}$$

Pour $y := (1-t)^{-1}v$ nous avons $\|y\|_Y < r$ et donc avec $k = 0$, $\varepsilon = rt$ et $w = y$ dans (15.2) nous obtenons $u_1 \in X$ tel que

$$\|u_1\|_X < t \quad \text{et} \quad \|y - \Lambda(u_1)\|_Y < rt.$$

De même en prenant $k = 1$, $\varepsilon = rt^2$ et $w = y - \Lambda(u_1)$ dans (15.2) nous obtenons $u_2 \in X$ tel que

$$\|u_2\|_X < t^2 \quad \text{et} \quad \|y - \Lambda(u_1) - \Lambda(u_2)\|_Y < rt^2.$$

On construit donc ainsi par récurrence une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de X telle que

$$\|u_n\|_X < t^n \quad \text{et} \quad \|y - \Lambda(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)\|_Y < rt^n. \tag{15.3}$$

Pour $x_n := u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ la première inégalité de (15.3) nous dit que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach X et donc converge vers un $x \in X$. La seconde inégalité de (15.3) nous assure alors que $y = \Lambda(x)$. Evidemment nous avons $\|x\|_X \leq \frac{t}{1-t}$ et donc en posant $u := (1-t)x$ nous avons $\|u\|_X \leq t < 1$ et $\Lambda(u) = (1-t)y = v$. D'où l'inclusion $r\mathbb{U}_Y \subset \Lambda(\mathbb{U}_X)$. ■

Le corollaire ci-dessous étudie la bicontinuité d'une application linéaire continue bijective d'un espace de Banach dans un autre.

Corollaire 15.6 *Soient* $(X, \|\cdot\|_X)$ *et* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *deux* $\mathbb{K}$**-espaces de Banach** *et* $\Lambda : X \to Y$ *une application* **linéaire continue**. *Si* Λ *est* **bijective**, *alors l'application linéaire réciproque* Λ^{-1} *est continue.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, il existe un réel $c > 0$ tel que $c\,\mathbb{B}_Y \subset \Lambda(\mathbb{B}_X)$, i.e. pour $T := \Lambda^{-1}$ nous avons $T(\mathbb{B}_Y) \subset \frac{1}{c}\mathbb{B}_X$. Ainsi pour tout $y \in Y$ nous obtenons $\|T(y)\|_X \leq \frac{1}{c}\|y\|_Y$ et donc l'application linéaire T est continue. ■

Nous avons introduit dans le chapitre précédent le concept de somme directe topologique et nous en avons établi une caractérisation à l'aide des projecteurs associés. Dans le cas d'un espace de Banach nous avons aussi la caractérisation plus concrète suivante.

Proposition 15.7 *Soit* $(X, \|\ \|)$ *un* $\mathbb{K}$**-espace de Banach**. *Supposons que* X *soit la somme directe algébrique d'un nombre fini* $E_1, \cdots, E_m$ *de* $\mathbb{K}$*-sous-espaces vectoriels de* X*, i.e.* $X = E_1 \oplus_{\mathrm{alg}} + \cdots + \oplus_{\mathrm{alg}} E_m$. *Alors* X *est aussi la somme directe topologique de ces espaces, i.e.*

$$X = E_1 \oplus_{\mathrm{top}} + \cdots + \oplus_{\mathrm{top}} E_m,$$

si et seulement si tous les espaces $E_1, \cdots, E_m$ *sont fermés dans* $(X, \|\ \|)$.

Démonstration. Supposons que les espaces $E_1, \cdots, E_m$ soient fermés. Alors chaque E_k est complet pour la norme induite et donc $E_1 \times \cdots \times E_m$ est complet. Par ailleurs, l'application linéaire $\Lambda : E_1 \times \cdots \times E_m \to X$ définie par $\Lambda(x_1, \cdots, x_m) = x_1 + \cdots + x_m$ est évidemment continue et elle est bijective d'après l'hypothèse de somme directe algébrique. Le corollaire précédent implique la continuité de son application réciproque et donc la somme est une somme directe topologique.

Inversement si la somme est une somme directe topologique, alors l'application linéaire Λ ci-dessus est bicontinue et donc il est aisé (**Exer**) de voir que $E_1 \times \cdots \times E_m$ est complet car X l'est. Ainsi les ensembles $E_1, \cdots, E_m$ sont complets dans X et donc fermés dans X. ■

15.4 Théorème du graphe fermé

Nous savons que le graphe de toute application continue dans un espace topologique séparé est fermé dans l'espace produit mais que la réciproque est fausse en général. Le théorème ci-dessous **dû à Banach** donne un cas particulier où la réciproque est vraie.

Théorème 15.8 *(***Théorème du graphe fermé** *) Soient* $(X, \|\cdot\|_X)$ *et* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *deux* $\mathbb{K}$**-espaces de Banach**. *Alors une application* $\mathbb{K}$**-linéaire** $\Lambda : X \to Y$ *est continue si et seulement si son graphe* $\operatorname{gph} \Lambda$ *est fermé dans* $X \times Y$ *pour la topologie produit associée aux normes* $\| \ \|_X$ *et* $\| \ \|_Y$.

Démonstration. Supposons que $G := \operatorname{gph} \Lambda$ soit fermé dans $X \times Y$. En posant $\|(x, y)\|_0 = \|x\|_X + \|y\|_Y$ pour tout $(x, y) \in G$, on voit aisément que $\| \ \|_0$ est une norme sur G et que $(G, \| \ \|_0)$ est un $\mathbb{K}$-espace de Banach (puisque G est fermé dans $X \times Y$). Par aillleurs l'application linéaire $T : G \to X$ définie par $T(x, y) := x$ pour tout $(x, y) \in G$ est évidemment $(\| \ \|_0, \| \ \|_X)$-continue. On vérifie sans difficulté que T est bijective avec pour application réciproque l'application linéaire $S : X \to G$ définie par $S(x) := (x, \Lambda(x))$ pour tout $x \in X$. Le corollaire du sous-paragraphe précédent nous dit que S est continue et donc il existe un réel $\gamma \geq 0$ tel que pour tout $x \in X$ on ait $\|S(x)\|_0 \leq \gamma \|x\|_X$. Ceci entraîne en particulier que pour tout $x \in X$ on a $\|\Lambda(x)\|_Y \leq \gamma \|x\|_X$, et donc l'application linéaire Λ est $(\| \ \|_X, \| \ \|_Y)$-continue. ■

A l'aide du théorème du graphe fermé nous pouvons montrer qu'une application linéaire entre deux espaces de Banach est continue pour les topologies associées aux normes si et seulement si elle est continue pour les topologies faibles.

Théorème 15.9 *(a) Si une application* $\mathbb{K}$**-linéaire** *d'un* $\mathbb{K}$*-espace localement convexe séparé (Hausdorff)* $(X, \mathcal{O}_X)$ *dans un* $\mathbb{K}$*-espace localement convexe séparé (Hausdorff)* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *est* $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$*-continue, alors elle est* $(w(X, X^*), w(Y, Y^*))$*-continue.*
(b) Une application $\mathbb{K}$**-linéaire** *d'un* $\mathbb{K}$*-espace de* **Banach** $(X, \| \ \|_X))$ *dans un* $\mathbb{K}$*-espace de* **Banach** $(Y, \| \ \|_Y)$ *est* $(\| \ \|_X, \| \ \|_Y)$*-continue si et seulement si elle est* $(w(X, X^*), w(Y, Y^*))$*-continue.*

Démonstration. Soit $\Lambda : X \to Y$ une application $\mathbb{K}$-linéaire.
(a) Supposons que Λ soit $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$-continue. Fixons un $v^* \in Y^*$ (dual topologique de $(Y, \mathcal{O}_Y)$). La forme $\mathbb{K}$-linéaire $v^* \circ \Lambda$ est $\mathcal{O}_X$-continue et donc aussi $w(X, X^*)$-continue (car nous savons qu'une forme $\mathbb{K}$-linéaire sur X est $\mathcal{O}_X$-continue si et seulement si elle est $w(X, X^*)$-continue). Par conséquent, par caractérisation d'application linéaire continue entre espaces localement convexes, il existe un réel $\gamma \geq 0$ et $u_1^*, \cdots, u_m^* \in X^*$ tels que

$$q_{v^*}(\Lambda(x)) = |v^*(\Lambda(x))| = |(v^* \circ \Lambda)(x)| \leq \gamma \max_{1 \leq k \leq m} p_{u_k^*}(x),$$

où $p_{u_k^*}(x) := |u_k^*(x)|$. Ceci nous dit via le même théorème de caractérisation de continuité que l'application $\mathbb{K}$-linéaire Λ est $(w(X, X^*), w(Y, Y^*))$-continue.

(b) L'implication $\Rightarrow$ découle de (a). Supposons que Λ soit $(w(X,X^*),w(Y,Y^*))$-continue. Alors le graphe de Λ est fermé dans $X\times Y$ pour la topologie produit de $w(X,X^*)$ et $w(Y,Y^*)$ car la topologie $w(Y,Y^*)$ est séparée (Hausdorff). Or nous avons vu que par identification cette topologie produit coincide avec la topologie faible $w(X\times Y,X^*\times Y^*)$. Le graphe de Λ est donc $w(X\times Y,X^*\times Y^*)$-fermé et donc (étant convexe) il est fermé en norme dans $X\times Y$ d'après le théorème de Mazur. L'espace vectoriel $X\times Y$ étant complet relativement à l'une (quelconque) des normes produit, le théorème du graphe fermé (de Banach) nous dit que l'application $\mathbb{K}$-linéaire Λ est $(\|\ \|_X,\|\ \|_Y)$-continue. Ceci termine la démonstration. ■

16 Espace de Banach et dual topologique

Le dual topologique d'un $\mathbb{K}$-espace normé $(X,\|\ \|)$ sera noté X^*, i.e. $(X,\|\ \|)^* =: X^*$. Sur $X^*=\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ la norme canonique rappelée dans le sous-paragraphe 15.2 est en général notée $\|\ \|_{X^*}$ ou $\|\ \|_*$ et donc par définition pour tout $u^*\in X^*$

$$\boxed{\|u^*\|_* := \sup_{x\in\mathbb{B}_X}|u^*(x)| = \sup_{x\in\mathbb{B}_X}|\langle u^*,x\rangle|}.$$

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on vérifie sans difficulté (**Exer**) que l'on a les mêmes égalités sans $|\ |$, i.e.

$$\boxed{\|u^*\|_* = \sup_{x\in\mathbb{B}_X} u^*(x) = \sup_{x\in\mathbb{B}_X}\langle u^*,x\rangle \quad \text{pour } \mathbb{K}=\mathbb{R}}.$$

Pour $X\neq\{0_X\}$ on a aussi $\boxed{\|u^*\|_* = \sup_{x\in\mathbb{S}_X}|u^*(x)|}$, où $\mathbb{S}_X:=\{x\in X:\|x\|=1\}$ (noter que l'égalité a aussi lieu sans $|\ |$ quand $\mathbb{K}=\mathbb{R}$). En général on dit que la topologie associée à la norme $\|\ \|$ de X (resp. $\|\ \|_*$ de X^*) est la **topologie forte** de X (resp. X^*).

La définition ci-dessus entraîne trivialement le résultat suivant.

Proposition 16.1 *Soit $(X,\|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Alors la norme duale $\|\ \|_*$ est une fonction $*$-faiblement sci (i.e. $w(X^*,X)$-sci) et la boule unité fermée $\mathbb{B}_{X^*}$ de X^* est $*$-faiblement fermée (i.e. $w(X^*,X)$-fermée).*

Plusieurs résultats de cette section utiliseront la version analytique suivante du théorème de Hahn-Banach dans le cas d'espaces vectoriels **complexes**.

Théorème 16.2 *Soient Y un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X et $p:X\to\mathbb{R}$ un semi-norme sur X. Soit $\varphi:Y\to\mathbb{K}$ une forme $\mathbb{K}$-linéaire sur Y vérifiant $|\varphi(y)|\le p(y)$ pour tout $y\in Y$.*

Alors il existe une forme $\mathbb{K}$-linéaire $\psi:X\to\mathbb{K}$ sur X prolongeant φ et telle que $|\psi(x)|\le p(x)$ pour tout $x\in X$.

Démonstration. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ alors pour tout $y\in Y$ l'hypothèse $|\varphi(y)|\le p(y)$ entraîne que $\varphi(y)\le p(y)$ et donc d'après le théorème de Hahn-Banach analytique réel φ admet un prolongement $\mathbb{R}$-linéaire ψ sur X qui est majoré par p sur X (car p est sous-linéaire). Ainsi pour tout $x\in X$ on a $\psi(x)\le p(x)$ et $-\psi(x)=\psi(-x)\le p(-x)=p(x)$ et donc $-p(x)\le\psi(x)\le p(x)$, i.e. $|\psi(x)|\le p(x)$.

Supposons maintenant que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Alors $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi$ est $\mathbb{R}$-linéaire et pour tout $y\in Y$ on a $|\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(y)|\le p(y)$ car $|\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi(y)|\le|\varphi(y)|$. D'après le cas précédent, on peut prolonger $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\varphi$ en une forme $\mathbb{R}$-linéaire ψ_0 sur X qui vérifie $|\psi_0(x)|\le p(x)$ pour tout $x\in X$. La fonction $\psi:X\to\mathbb{C}$ définie par

$\psi(x) := \psi_0(x) - i\psi_0(ix)$ est une forme $\mathbb{C}$-linéaire. De plus pour $x \in X$ en notant θ l'argument de $\psi(x)$ on a

$$|\psi(x)| = e^{-i\theta}\psi(x) = \psi(e^{-i\theta}x) = \psi_0(e^{-i\theta}x) - i\psi_0(ie^{-i\theta}x),$$

ce qui implique que $|\psi(x)| = \psi_0(e^{-i\theta}x)$ (car $|\psi(x)| \in \mathbb{R}$) et donc

$$|\psi(x)| = \psi_0(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x).$$

Ceci termine la démonstration. ■

Une application importante (de la version) du théorème de Hahn-Banach ci-dessus est le résultat suivant.

Proposition 16.3 *Soit Y un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ et $\varphi : Y \to \mathbb{K}$ une forme $\mathbb{K}$-linéaire* **continue** *sur Y par rapport à la norme induite. Alors on peut prolonger φ en une forme $\mathbb{K}$-linéaire $\psi : X \to \mathbb{K}$* **continue** *sur X et telle que $\|\psi\|_{X^*} = \|\varphi\|_{Y^*}$.*

Démonstration. Observons que pour tout $y \in Y$ nous avons $|\varphi(y)| \leq \|\varphi\|_{Y^*} \cdot \|y\|_Y$. Ainsi en utilisant la semi-norme p définie par $p(x) := \|\varphi\|_{Y^*} \cdot \|x\|_X$ dans le théorème ci-dessus, nous obtenons un prolongement $\mathbb{K}$-linéaire $\psi : X \to \mathbb{K}$ tel que $|\psi(x)| \leq \|\varphi\|_{Y^*} \cdot \|x\|_X$ et donc $\|\psi\|_{X^*} \leq \|\varphi\|_{Y^*}$, ce qui permet d'écrire (puisque $\mathbb{B}_Y \subset \mathbb{B}_X$)

$$\|\psi\|_{X^*} \leq \|\varphi\|_{Y^*} = \sup_{y \in \mathbb{B}_Y} |\varphi(y)| \leq \sup_{x \in \mathbb{B}_X} |\psi(x)| = \|\psi\|_{X^*}.$$

Par conséquent $\|\psi\|_{X^*} = \|\varphi\|_{Y^*}$ et la démonstration est terminée. ■

La proposition suivante est une conséquence de la proposition ci-dessus. Elle exprime la norme initiale de X à partir des éléments de $\mathbb{B}_{X^*}$ ou $\mathbb{S}_{X^*} := \{x^* \in X^* : \|x^*\|_* = 1\}$.

Proposition 16.4 *Soit $(X, \| \, \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Alors pour tout $u \in X$ non nul il existe un $x_0^* \in X^*$ avec $\|x_0^*\|_* = 1$ et $\langle x_0^*, u\rangle = \|u\|$ et donc en particulier*

$$\boxed{\|u\| = \max_{x^* \in \mathbb{S}_{X^*}} |x^*(u)| = \max_{x^* \in \mathbb{B}_{X^*}} |x^*(u)| = \max_{x^* \in \mathbb{B}_{X^*}} |\langle x^*, u\rangle| = \sup_{x^* \in \mathbb{B}_{X^*}} |\langle x^*, u\rangle|}.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, nous avons aussi les mêmes égalités sans $| \, |$, i.e.

$$\boxed{\|u\| = \max_{x^* \in \mathbb{S}_{X^*}} x^*(u) = \max_{x^* \in \mathbb{B}_{X^*}} x^*(u) = \max_{x^* \in \mathbb{B}_{X^*}} \langle x^*, u\rangle = \sup_{x^* \in \mathbb{B}_{X^*}} \langle x^*, u\rangle \quad \textit{pour } \mathbb{K} = \mathbb{R}}.$$

Démonstration. Pour $Y := \mathbb{K}u$ la fonction $\varphi : \mathbb{K}u \to \mathbb{K}$ avec $\varphi(\lambda u) = \lambda\|u\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ est une forme $\mathbb{K}$-linéaire (**Exer**) sur Y qui vérifie $|\varphi(\lambda u)| = |\lambda| \, \|u\| = \|\lambda u\|$, i.e. $|\varphi(y)| = \|y\|$ pour tout $y \in Y$. Cette forme $\mathbb{K}$-linéaire $\varphi : Y \to \mathbb{K}$ est donc continue sur Y et $\|\varphi\|_{Y^*} = 1$. La proposition ci-dessus nous permet de prolonger φ en une forme $\mathbb{K}$-linéaire $\psi : X \to \mathbb{K}$ continue sur X avec $\|\psi\|_{X^*} = \|\psi\|_{Y^*} = 1$. De plus, nous avons $\psi(u) = \varphi(u) = \|u\|$ par définition de φ. Il suffit donc de choisir $x_0^* = \psi$. Par ailleurs la formule exprimant la norme de u est une conséquence directe de ce qui précède.

Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est laissé comme **exercice**. ■

Moyennant la proposition 16.4, nous pouvons comparer pour un espace normé les concepts d'ensembles $\| \, \|$-bornés et $w(X, X^*)$-bornés.

Proposition 16.5 *Soit* $(X, \| \|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé. Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Un sous-ensemble de X *est* $\| \|$*-borné si et seulement s'il est* $w(X, X^*)$*-borné.*
(b) Un sous-ensemble de X^* *est* $\| \|_*$*-borné si et seulement s'il est* $w(X^*, X)$*-borné.*

Démonstration. Comme les topologies $w(X, X^*)$ et $w(X^*, X)$ sont contenues dans les topologies associées aux normes $\| \|$ et $\| \|_*$ respectivement, les implications $\Rightarrow$ sont évidentes.
(a) Fixons un ensemble $w(X, X^*)$-borné $A \subset X$ et pour chaque $u \in A$ considérons la forme $\mathbb{K}$-linéaire $\varphi_u : X^* \to \mathbb{K}$ définie par $\varphi_u(x^*) := x^*(u)$. Comme A est $w(X, X^*)$-borné, pour chaque $x^* \in X^*$ nous avons $\sup\limits_{u \in A} |\varphi_u(x^*)| = \sup\limits_{u \in A} |\langle x^*, u\rangle| < +\infty$. L'espace $(X^*, \| \|_*)$ étant complet, le théorème de Banach-Steinhaus nous dit qu'il existe une constante réelle $\gamma \geq 0$ tel que pour tout $u \in A$ on ait $\|\varphi_u\|_{\mathcal{L}(X^*, \mathbb{K})} \leq \gamma$. Ceci combiné avec la dernière proposition ci-dessus entraîne que pour tout $u \in A$

$$\|u\| = \sup_{x^* \in \mathbb{B}_{X^*}} |\langle x^*, u\rangle| = \sup_{x^* \in \mathbb{B}_{X^*}} |\varphi_u(x^*)| = \|\varphi_u\|_{\mathcal{L}(X^*, \mathbb{K})} \leq \gamma,$$

et donc l'ensemble A est $\| \|$-borné dans X.
(b) Soit $A \subset X^*$ un ensemble $w(X^*, X)$-borné. Quitte à remplacer $(X, \|\|)$ par son complété (**Exer**) nous pouvons supposer que $(X, \| \|)$ est complet. Comme pour chaque $x \in X$ nous avons par hypothèse $\sup\limits_{u^* \in A} |\langle u^*, x\rangle| < +\infty$, le théorème de Banach-Steinhaus à nouveau nous fournit un réel $\gamma \geq 0$ tel que pour tout $u^* \in A$ on ait $\|u^*\|_* = \|u^*\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{K})} \leq \gamma$. Ceci nous dit que A est $\| \|_*$-borné dans X^* et termine la démonstration. ■

Notre prochain objectif est de caractériser les sous-ensembles $w(X^*, X)$-compacts de l'espace dual topologique X^* d'un espace de Banach.

Une forme $\mathbb{K}$-linéaire sur X étant avant tout une fonction de X dans $\mathbb{K}$ nous avons

$$\boxed{X^* \subset \mathbb{K}^X}.$$

Par ailleurs, pour les suites généralisées de X^* nous savons que $x_j^* \xrightarrow[j \in J]{w(X^*, X)} x^*$ si et seulement si pour chaque $x \in X$ nous avons $x_j^*(x) \xrightarrow[j \in J]{} x^*(x)$. Nous en déduisons que la topologie

$$\boxed{w(X^*, X) \text{ coincide avec la topologie induite sur } X^* \text{ par la topologie de la convergence simple}}$$

ou topologie produit de $\mathbb{K}^X$.

Lemme 16.6 *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* **localement convexe séparé (Hausdorff)** *et* X^* *son dual topologique. Alors un sous-ensemble de* X^* *est* $w(X^*, X)$*-compact dans* X^* *si et seulement s'il est* $w(X^*, X)$*-borné dans* X^* *et fermé dans* $\mathbb{K}^X$ *pour la topologie produit.*

Démonstration. Soit $A \subset X^*$ un ensemble $w(X^*, X)$-compact. D'une part, A est $w(X^*, X)$-borné car tout compact d'un espace vectoriel topologique est borné dans cet espace. D'autre part, A est compact dans l'espace séparé (Hausdorff) $\mathbb{K}^X$ car $w(X^*, X)$ est la topologie induite par la topologie produit, et donc A est fermé dans $\mathbb{K}^X$.

Supposons maintenant que $A \subset X^*$ soit $w(X^*, X)$-borné dans X^* et fermé dans $\mathbb{K}^X$ pour la topologie produit. L'hypothèse que A est $w(X^*, X)$-borné se traduit par l'existence, pour chaque $u \in X$, d'un réel $r_u \geq 0$ tel que pour tout $x^* \in A$ on ait $|x^*(u)| = q_u(x^*) \leq r_x$, i.e. l'ensemble

$\{x^*(u) : x^* \in A\}$ est borné dans $\mathbb{K}$. Comme de plus A est par hypothèse fermé dans $\mathbb{K}^X$ pour la topologie produit, d'après le théorème de caractérisation de compacité dans un espace produit, l'ensemble A est compact dans $\mathbb{K}^X$ pour la topologie produit. Comme $A \subset X^*$, nous concluons donc que A est compact dans X^* pour la topologie induite par la topologie produit de $\mathbb{K}^X$, i.e. A est $w(X^*, X)$-compact dans X^*. ■

Nous savons qu'un ensemble de $\mathbb{K}^n$ est d'adhérence compacte si et seulement s'il est borné dans $\mathbb{K}^n$. Ce qui précède nous permet d'établir le résultat similaire suivant pour la topologie $*$-faible du dual d'un espace de Banach.

Théorème 16.7 *(***Théorème caractérisant la compacité $*$-faible ou théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki***) Soit $(X, \| \ \|)$ un* **$\mathbb{K}$-espace vectoriel normé** *et $A \subset X^*$ un sous-ensemble de X^*. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes entre elles.*
(a) L'ensemble A est $*$-faiblement compact dans X^* (i.e. $w(X^*, X)$-compact) ;
(b) L'ensemble A est $*$-faiblement fermé et $*$-faiblement borné dans X^* ;
(c) L'ensemble A est $*$-faiblement fermé et $\| \ \|_*$-borné dans X^*.

En particulier la **boule unité fermée** *$\mathbb{B}_{X^*}$ de X^* est $*$-faiblement compact.*

Démonstration. L'équivalence $(b) \Leftrightarrow (c)$ a lieu car un ensemble est $w(X^*, X)$-borné dans X^* si et seulement s'il est $\| \ \|_*$-borné (voir la proposition 16.5). D'autre part, $(a) \Rightarrow (b)$ car tout compact d'un espace vectoriel topologique séparé (Hausdorff) est borné et fermé dans cet espace.

Il reste à montrer $(c) \Rightarrow (a)$ et pour cela d'après le lemme ci-dessus il suffit de vérifier que A est fermé dans $\mathbb{K}^X$. Comme A est $\| \ \|_*$-borné par hypothèse, il existe un réel $\gamma \geq 0$ tel que pour tout $u^* \in A$ on ait $\|u^*\|_* \leq \gamma$ ce qui équivaut à $|\langle u^*, x\rangle| \leq \gamma\|x\|$ pour tout $x \in X$. Soit $(u_j^*)_{j\in J}$ une suite généralisée de A convergeant dans $\mathbb{K}^X$ vers un élément $f \in \mathbb{K}^X$. Il s'agit de montrer que $f \in A$. Pour chaque $x \in X$ par propriété de topologie produit nous avons $u_j^*(x) \underset{j\in J}{\longrightarrow} f(x)$. Ceci nous assure d'une part que la fonction $f : X \to \mathbb{K}$ est $\mathbb{K}$-linéaire (**Exer**) et d'autre part que pour chaque $x \in X$ fixé en passant à la limite sur $j \in J$ dans $|u_j^*(x)| \leq \gamma\|x\|$ nous obtenons $|f(x)| \leq \gamma\|x\|$. Par conséquent la fonction $\mathbb{K}$-linéaire f est $\| \ \|$-continue et donc $f \in X^*$. Ainsi écrire $u_j^*(x) \underset{j\in J}{\longrightarrow} f(x)$ revient à écrire $\langle u_j^*, x\rangle \underset{j\in J}{\longrightarrow} \langle f, x\rangle$ et donc la suite généralisée $(u_j^*)_{j\in J}$ $w(X^*, X)$-converge vers f dans X^*. Comme A est par hypothèse $w(X, X^*)$-fermé nous obtenons que $f \in A$. D'où l'implication $(c) \Rightarrow (a)$.

Enfin nous avons déjà mentionné que $\mathbb{B}_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\|_* \leq 1\}$ est $w(X^*, X)$-fermé à cause de la $w(X^*, X)$-semi-continuité inférieure de la norme $\| \ \|_*$ (voir la proposition 16.1), et donc on peut appliquer (c) pour obtenir la $w(X^*, X)$-compacité de $\mathbb{B}_{X^*}$. ■

Remarque. Attention, le théorème ci-dessus **n'a pas lieu pour la topologie faible** $w(X, X^*)$ de X. ■

17 Espace de Banach réflexif

Soit $(X, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $\mathcal{O}_{\| \ \|}$ la topologie associée à la norme $\| \ \|$. On notera $(X, \| \ \|)^*$ (resp. $\mathrm{Dual_{top}}(X, \| \ \|)$)) au lieu de $(X, \mathcal{O}_{\| \ \|})^*$ (resp. $\mathrm{Dual_{top}}(X, \mathcal{O}_{\| \ \|})$), i.e. pour X^* désignant le dual topologique de $(X, \mathcal{O}_{\| \ \|})$ on a

$$X^* := \mathrm{Dual_{top}}(X, \| \ \|) = (X, \| \ \|)^*.$$

Evidemment si $\| \ \|'$ est une autre **norme équivalente** à $\| \ \|$ on a $(X, \| \ \|)^* = (X, \| \ \|')^*$ car $\mathcal{O}_{\| \ \|} = \mathcal{O}_{\| \ \|'}$.

Sur X^* nous pouvons considérer la topologie $*$-faible $w(X^*, X)$. Nous avons vu dans le chapitre précédent que le dual topologique de $(X^*, w(X^*, X))$ s'identifie à X, i.e.

$$\mathrm{Dual_{top}}(X^*, w(X^*, X)) = (X^*, w(X^*, X))^* \equiv X,$$

via la bijection $\Phi : X \to \mathrm{Dual_{top}}(X^*, w(X^*, X))$ avec $\boxed{\Phi(x)(u^*) = u^*(x)}$, i.e. $\boxed{\Phi(x) \equiv x}$.

Nous savons que l'on peut aussi munir X^* de la norme (canonique) duale $\| \ \|_*$ de la norme $\| \ \|$, définie par $\|x^*\|_* := \sup\limits_{u \in \mathbb{B}_X} |x^*(u)|$. En notant $\mathcal{O}_{\| \ \|_*}$ la topologie associée à la norme $\| \ \|_*$, on peut considérer le dual topologique de $(X^*, \| \ \|_*)$, i.e.

$$\mathrm{Dual_{top}}(X^*, \| \ \|_*) = (X^*, \| \ \|_*)^* =: Z.$$

Pour chaque $u \in X$ on peut considérer l'application

$$\boxed{J(u) : X^* \to \mathbb{K} \quad \text{définie par } J(u)(x^*) := x^*(u) \quad \text{pour tout } x^* \in X^*}.$$

Evidemment $J(u)$ est $\mathbb{K}$-linéaire et

$$|J(u)(x^*)| = |x^*(u)| \leq \|x^*\|_* \cdot \|u\| = \|u\| \cdot \|x^*\|_* \quad \text{pour tout } x^* \in X^*,$$

et donc la forme $\mathbb{K}$-linéaire $J(u)$ est $\| \ \|_*$-continue sur X^*, i.e. $J(u) \in (X^*, \| \ \|_*)^* =: Z$. Nous avons ainsi défini une application

$$J : X \to Z := \mathrm{Dual_{top}}(X^*, \| \ \|_*)$$

et cette application est évidemment $\mathbb{K}$-linéaire. De plus, en munissant Z de la norme $\| \ \|_Z$ (norme duale de $\| \ \|_*$), donnée par $\|\zeta\|_Z := \sup\limits_{x^* \in \mathbb{B}_{X^*}} |\zeta(x^*)|$ pour tout $\zeta \in Z$, nous avons

$$\|J(u)\|_Z = \sup_{x^* \in \mathbb{B}_{X^*}} |J(u)(x^*)| = \sup_{x^* \in \mathbb{B}_{X^*}} |x^*(u)| = \|u\|, \tag{17.1}$$

la dernière égalité découlant de la proposition 16.4. Par conséquent l'application

$$\boxed{J : (X, \| \ \|) \to (Z, \| \ \|_Z) \quad \text{est linéaire, injective et conserve les normes}}.$$

En général cette application J **n'est pas surjective** (voir le cas plus loin de $c_0(\mathbb{N})$) et donc en général on ne peut pas identifier via J l'espace $(X^*, \| \ \|_*)^*$ à X. On note donc $(X^*)^*$ ou simplement X^{**} le dual topologique de $(X^*, \| \ \|_*)$, i.e.

$$\boxed{\mathrm{Dual_{top}}(X^*, \| \ \|_*) = (X, \| \ \|_*)^* =: X^{**}}.$$

On dit que $X^{**} := (X^*, \| \ \|_*)^*$ est le **bidual topologique** de $(X, \| \ \|)$ et que J est **l'injection naturelle ou canonique de X dans X^{**}**. Notons que l'égalité $J(u)(x^*) = x^*(u)$ définissant $J(u)$ peut être reécrite sous la forme

$$\boxed{\langle J(u), x^* \rangle_{X^{**}, X^*} = \langle x^*, u \rangle_{X^*, X} \quad \text{ou} \quad J(u) = \langle \cdot\,, u \rangle_{X^*, X} \text{ avec } J(u) \in X^{**}}.$$

Un élément générique de X^{**} sera en général notée x^{**} (**élément non lié** à x^* élément générique de X^* ni à x élément générique de X). La norme ci-dessus de $Z := X^{**}$ sera notée $\| \|_{X^{**}}$ ou $\| \|_{**}$, i.e.

$$\boxed{\|x^{**}\|_{**} := \sup_{u^* \in \mathbb{B}_{X^*}} |x^{**}(u^*)| = \sup_{u^* \in \mathbb{B}_{X^*}} |\langle x^{**}, u^* \rangle_{X^{**}, X^*}| \quad \text{pour tout } x^{**} \in X^{**}}.$$

De même $\mathbb{B}_{X^{**}}$ désignera la boule unité fermée (par rapport à la norme $\| \|_{**}$) de X^{**} centrée en $0_{X^{**}}$,i.e. $\boxed{\mathbb{B}_{X^{**}} := B_{X^{**}}[0_{X^{**}}; 1]}$.

Par ailleurs, en écrivant X^{**} au lieu de Z dans (17.1) nous obtenons que l'égalité

$$\boxed{\|J(u)\|_{X^{**}} = \|u\| \quad \text{pour tout } u \in X} \tag{17.2}$$

a toujours lieu. De même ont toujours lieu (**Exer**) les inclusions

$$\boxed{w(X^*, X) \subset w(X^*, X^{**}) \subset \mathcal{O}_{\| \|_*}}.$$

Observons également que pour tout $u^* \in X^*$ nous avons toujours

$$q_{u^*}(J(u)) := |J(u)(u^*)| = |u^*(u)| =: p_{u^*}(u),$$

i.e.

$$\boxed{q_{u^*}(J(u)) = p_{u^*}(u) \quad \text{pour tout } u \in X}. \tag{17.3}$$

L'application J n'étant pas surjective, on considère parfois l'application linéaire $J_0 : X \to J(X)$, définie par $J_0(x) := J(x)$ pour tout $x \in X$, qui est bijective. De plus si l'on désigne par $\| \|_{J(X)}$ (resp. ω) la norme (resp. la topologie) induite sur $J(X)$ par $\| \|_{**}$ (resp. $w(X^{**}, X^*)$), alors (17.2) (resp. (17.3)) nous dit que l'application linéaire J_0 est une isométrie surjective de $(X, \| \|)$ sur $(J(X), \| \|_{J(X)})$ (resp. un homéomorphisme de $(X, w(X, X^*))$ sur $(J(X), \omega)$).

Remarquons maintenant que si l'application J ci-dessus est surjective, nécessairement l'espace $(X, \| \|)$ est complet puisque J est dans ce cas une isométrie bijective de $(X, \| \|)$ sur le dual topologique de $(X^*, \| \|_*)$ et que le dual topologique de tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé est complet pour sa norme canonique. Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 17.1 *On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace de* **Banach** $(X, \| \|)$ *est* **réflexif** *quand l'application J ci-dessus (qui dépend de X et $\| \|$) est* **surjective**, *ce qui revient à dire que* **l'injection canonique ou naturelle** $J : X \to X^{**}$ **est une isométrie linéaire surjective**. *Dans ce cas on peut identifier X^{**} à X via J, i.e.*

$$\boxed{J(x) \equiv x \quad \textit{et} \quad X^{**} = (X^*, \| \|_*)^* \equiv X \quad \textit{quand} \ (X, \| \|) \ \textit{est réflexif}}. \ \blacksquare$$

Ainsi nous pouvons observer tout de suite que l'application linéaire J est surjective si et seulement si $J(\mathbb{B}_X) = \mathbb{B}_{X^{**}}$.

Remarque. Il est important de mentionner que la définition de réflexivité requiert la surjectivité de **l'injection naturelle** qui dans ce cas devient une isométrie linéaire surjective. Elle ne correspond pas à l'existence d'une isométrie linéaire surjective (quelconque) de X sur X^{**}. En effet il existe des espaces de Banach (de dimension infinie) $(X, \| \|)$ **qui ne sont pas réflexifs** mais pour lesquels **il existe une isométrie linéaire surjective** Λ de $(X, \| \|)$ sur $(X^{**}, \| \|_{**})$. $\blacksquare$

Exemple. Tout espace de **Hilbert est réflexif**. En effet le théorème de Riesz nous assure que, pour un espace de Hilbert, l'injection canonique ci-dessus est une isométrie linéaire bijective. Plusieurs autres exemples apparaitront plus loin. ■

Soient $\| \|_1$ et $\| \|_2$ deux **normes équivalentes** sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X. On vérifie sans difficulté (**Exer**) que leurs normes duales $\| \|_{1,*}$ et $\| \|_{2,*}$ sont aussi équivalentes sur X^* et donc $(X^*, \| \|_{1,*})^* = (X^*, \| \|_{2,*})^*$. Par conséquent l'espace $(X, \| \|_1)$ est réflexif si et seulement si $(X, \| \|_2)$ est réflexif. Parfois on dira donc simplement que X est réflexif pour exprimer que $(X, \| \|)$ est réflexif.

Si J est surjective, alors J coincide avec J_0 ci-dessus et donc J est une isométrie bijective de $(X, \| \|)$ sur $(X^{**}, \| \|_{**})$ et un homéomorphisme de $(X, w(X, X^*))$ sur $(X^{**}, w(X^{**}, X^*))$. De plus, comme $B_{X^{**}}$ est $w(X^{**}, X^*)$-compact d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, il s'ensuit que l'ensemble $\mathbb{B}_X = J^{-1}(\mathbb{B}_{X^{**}})$ est $w(X, X^*)$-compact comme l'image du $w(X^{**}, X^*)$-compact $\mathbb{B}_{X^{**}}$ par l'application $(w(X^{**}, X^*), w(X, X^*))$-continue J^{-1}.

Nous avons donc établi la proposition suivante.

Proposition 17.2 *Si un $\mathbb{K}$-espace de Banach $(X, \| \|)$ est réflexif, alors l'injection naturelle (linéaire) $J : X \to X^{**}$ est une* **isométrie bijective de** $(X, \| \|)$ **sur** $(X^{**}, \| \|_{**})$ *et aussi un* **homéomorphisme de** $(X, w(X, X^*))$ **sur** $(X^{**}, w(X^{**}, X^*))$.

De plus la boule unité fermée $\mathbb{B}_X$ est faiblement compacte dans X, i.e. $w(X, X^*)$-compacte. ■

Les deux premières propriétés de la proposition évidemment caractérisent la réflexivité de $(X, \| \|)$ car elles impliquent trivialement la surjectivité de J. Notre tâche est maintenant de montrer que la propriété de compacité faible de $\mathbb{B}_X$ caractérise également (i.e. entraîne) la réflexivité de $(X, \| \|)$. Pour cela montrons d'abord le théorème suivant **dû à Goldstine**. Pour bien saisir la portée de ce théorème, il faut noter que $J(\mathbb{B}_X)$ **est toujours** $\| \|_{**}$**-fermé** dans X^{**} (**Exer**) car $J(\mathbb{B}_X)$ est $\| \|_{**}$-complet puisque $\mathbb{B}_X$ est $\| \|$-complet et J conserve les normes. Noter que les mêmes arguments impliquent que $J(X)$ **est toujours** $\| \|_{**}$**-fermé** également dans X^{**}.

Théorème 17.3 (Théorème de Goldstine) *Pour l'injection naturelle J ci-dessus, l'ensemble $J(\mathbb{B}_X)$ est toujours $w(X^{**}, X^*)$-dense dans $\mathbb{B}_{X^{**}}$. De même $J(X)$ est toujours $w(X^{**}, X^*)$-dense dans X^{**}.*

Démonstration. Comme $\mathbb{B}_{X^{**}}$ est $w(X^{**}, X^*)$-fermé (voir la proposition 16.1), nous avons $C := \mathrm{adh}_{w(X^{**},X^*)} J(\mathbb{B}_X) \subset \mathbb{B}_{X^{**}}$. Supposons qu'il existe un $a^{**} \in \mathbb{B}_{X^{**}} \setminus C$. Le second théorème de séparation de Hahn-Banach nous fournit une forme $\mathbb{K}$-linéaire $w(X^{**}, X^*)$-continue $\varphi : X^{**} \to \mathbb{K}$ (i.e. $\varphi \in (X^{**}, w(X^{**}, X^*))^*$), un réel α et un réel $\varepsilon > 0$ tels que $C \subset \{\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi \leq \alpha - \varepsilon\}$ et $\mathcal{R}\mathrm{e}\, \varphi(a^{**}) \geq \alpha + \varepsilon$. La bijection Φ de $(X^{**}, w(X^{**}, X^*))^*$ sur X^* (voir le dernier paragraphe du chapitre précédent) nous dit qu'il existe un $a^* \in X^*$ (et un seul) tel que $\varphi(x^{**}) = x^{**}(a^*)$ pour tout $x^{**} \in X^{**}$. Il en résulte que $\mathcal{R}\mathrm{e}\, a^{**}(a^*) \geq \alpha + \varepsilon$ et $\mathcal{R}\mathrm{e}\, a^*(x) = \mathcal{R}\mathrm{e}\, J(x)(a^*) \leq \alpha - \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{B}_X$. Ainsi pour chaque $x \in \mathbb{B}_X$ en posant $\theta := \arg(a^*(x))$ nous obtenons

$$|a^*(x)| = \mathcal{R}\mathrm{e}\, \left(e^{-i\theta} a^*(x)\right) = \mathcal{R}\mathrm{e}\, \left(a^*(e^{-i\theta} x)\right) \leq \alpha - \varepsilon.$$

Ceci nous assure que $\|a^*\|_* \leq \alpha - \varepsilon$, ce qui implique

$$|a^{**}(a^*)| \leq \|a^{**}\|_{**} \cdot \|a^*\|_* \leq (\alpha - \varepsilon)\|a^{**}\| \leq \alpha - \varepsilon,$$

la dernière inégalité résultant de l'inclusion $a^{**} \in \mathbb{B}_{X^{**}}$. L'inégalité $|a^{**}(a^*)| \leq \alpha - \varepsilon$ évidemment contredit l'autre inégalité $\mathcal{R}\mathrm{e}\, a^{**}(a^*) \geq \alpha + \varepsilon$. D'où la $w(X^{**}, X^*)$-densité de $J(\mathbb{B}_X)$ dans $\mathbb{B}_{X^{**}}$. La démonstration est donc terminée car le cas de $J(X)$ résulte aisément (**Exer**) du cas de $J(B_X)$. ■

Nous pouvons maintenant démontrer **l'important théorème suivant de caractérisation de la réflexivité**.

Théorème 17.4 *Soit un $\mathbb{K}$-espace de Banach $(X, \| \|)$. Les assertions suivantes sont équivalentes entre elles.*
(a) L'espace $(X, \| \|)$ est réflexif ;
(b) La boule unité fermée $\mathbb{B}_X$ est faiblement compacte, i.e. $w(X, X^*)$-compacte ;
(c) Tout ensemble convexe fermé borné de $(X, \| \|)$ est faiblement compact dans X ;
(d) La $w(X, X^*)$-adhérence de tout ensemble borné de $(X, \| \|)$ est faiblement compacte dans X.

Démonstration. L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte de la proposition 17.2.
$(b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$. **Exercice.**
$(b) \Rightarrow (a)$. Supposons que la boule unité $\mathbb{B}_X$ soit $w(X, X^*)$-compacte et considérons l'application linéaire $J_0 : X \to J(X)$ définie par $J_0(x) := J(x)$ pour tout $x \in X$. Nous avons vu que J_0 est un homéomorphisme de $(X, w(X, X^*))$ dans $J(X)$ muni de la topologie induite par $w(X^{**}, X^*)$ et donc l'ensemble $J(\mathbb{B}_X) = J_0(\mathbb{B}_X)$ est compact dans $J(X)$ pour cette topologie induite. Ceci nous assure que $J(\mathbb{B}_X)$ est $w(X^{**}, X^*)$-compact dans X^{**} et donc en particulier $w(X^{**}, X^*)$-fermé dans X^*. Il découle alors de ceci et du théorème de 17.3 que $J(\mathbb{B}_X) = \mathbb{B}_{X^{**}}$. D'où la réflexivité de $(X, \| \|)$ et la fin de la démonstration. ■

Ce théorème est à la base de plusieurs résultats. Le premier est relatif à la réflexivité des sous-espaces vectoriels fermés. Considérons au préalable un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel Y d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(X, \| \|)$ muni de la norme induite notée $\| \|_Y$. Pour chaque $v^* \in Y^*$ fixé, d'après une conséquence du théorème de Hahn-Banach (voir la proposition 16.3), il existe un $u^* \in X^*$ dont v^* est la restriction à Y. Par conséquent la semi-norme $|\langle v^*, \cdot \rangle_{Y^*,Y}|$ de Y est la restriction sur Y de la semi-norme $|\langle u^*, \cdot \rangle_{X^*,X}|$ de X. Ainsi la topologie faible de Y coincide la topologie induite sur Y par la topologie faible de X, i.e.

$$\boxed{w(Y, Y^*) \text{ est la topologie induite sur } Y \text{ par } w(X, X^*) \text{ si } Y \text{ s.e.v. de } X}.$$

Corollaire 17.5 *Tout sous-espace vectoriel* **fermé** *Y d'un $\mathbb{K}$-espace de Banach réflexif $(X, \| \|)$ est un espace de Banach réflexif pour la norme induite.*

Démonstration. L'ensemble Y étant convexe et $\| \|$-fermé dans X par hypothèse, il est $w(X, X^*)$-fermé dans X d'après le théorème de Mazur. Ainsi la boule $\mathbb{B}_X$ étant $w(X, X^*)$-compacte d'après le thérorème 17.4 de caractérisation de la réflexivité, l'ensemble $\mathbb{B}_Y = \mathbb{B}_X \cap Y$ est $w(X, X^*)$-compact dans X en tant que fermé contenu dans un compact. Comme $w(Y, Y^*)$ est la topologie induite sur Y par $w(X, X^*)$ (voir ci-dessus) et comme $\mathbb{B}_Y \subset Y$, l'ensemble $\mathbb{B}_Y$ est $w(Y, Y^*)$-compact dans Y. Le même théorème 17.4 entraîne que Y muni de la norme induite est un espace de Banach réflexif. ■

Le second résultat traite de la réflexivité du produit cartésien d'un nombre fini d'espaces réflexifs. Soient $(X_1, \| \|_1), \cdots, (X_m, \| \|_m)$ un nombre **fini** de $\mathbb{K}$-espaces normés et soit $X := X_1 \times \cdots \times X_m$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel produit cartésien muni de la norme produit $\|x\| := \max_{1 \le k \le m} \|x_k\|_k$ pour $x := (x_1, \cdots, x_m) \in X$. Notons τ la topologie produit sur X des topologies $w(X_1, X_1^*), \cdots, w(X_m, X_m^*)$. Notons aussi $\pi_k : X \to X_k$ l'application $\mathbb{K}$-linéaire qui à $x = (x_1, \cdots, x_m)$ fait correspondre x_k. Soit $\Phi : X_1^* \times \cdots \times X_m^* \to X^*$ la bijection linéaire (du dernier paragraphe du chapitre précédent) définie par $\Phi(x_1^*, \cdots, x_m^*) = x_1^* \circ \pi_1 + \cdots + x_m^* \circ \pi_m$. Pour chaque $u_k^* \in X_k^*$ fixé en posant $u^* := \Phi(0_{X_1^*}, \cdots, u_k^*, \cdots, 0_{X_m^*}) \in X^*$ nous avons pour tout $x \in X$

$$p_{u_k^*}(\pi_k(x)) = |u_k^*(\pi_k(x))| = |u_k^*(x_k)| = 1 \cdot p_{u^*}(x),$$

ce qui implique que l'application $\mathbb{K}$-linéaire $\pi_k : X \to X_k^*$ est $(w(X, X^*), w(X_k, X_k^*))$-continue. Par suite l'application $x \mapsto (\pi_1(x), \cdots, \pi_m(x))$ est $(w(X, X^*), \tau)$-continue, i.e. l'application Id_X est $(w(X, X^*), \tau)$-continue.

D'autre part, pour chaque $u^* \in X^*$ en choisissant $(u_1^*, \cdots, u_m^*) \in X_1^* \times \cdots \times X_m^*$ tel que (par la bijection Φ) on ait $u^* = \Phi(u_1^*, \cdots, u_m^*)$ on voit que pour tout $x \in X$ on a

$$p_{u^*}(\mathrm{Id}_X(x)) = |u^*(x)| = |u_1^*(x_1) + \cdots + u_m^*(x_m)| \leq m \cdot \max_{1 \leq k \leq m} p_{u_k^*}(x_k).$$

Comme $x \mapsto \max_{1 \leq k \leq m} p_{u_k^*}(x_k)$ est l'une des semi-normes engendrant la topologie τ, produit des topologies $w(X_k, X_k^*)$, la dernière inégalité ci-desssus (vraie pour tout $x \in X$) nous assure que Id_X est $(\tau, w(X, X^*))$-continue. Nous concluons donc que

$$\boxed{w(X, X^*) \text{ coincide avec le produit des topologies } w(X_1, X_1^*), \cdots, w(X_m, X_m^*)}.$$

Ainsi la **topologie faible d'un produit fini de $\mathbb{K}$-espaces normés coincide la topologie produit des topologies faibles**.

Corollaire 17.6 *Le produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces de Banach réflexifs est un $\mathbb{K}$-espace de Banach réflexif (pour l'une quelconque des normes produit).*

Démonstration. Soient $(X_1, \| \|_1), \cdots, (X_m, \| \|_m)$ un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces de Banach réflexifs et soit $X := X_1 \times \cdots \times X_m$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel produit cartésien muni de la norme produit $\|x\| := \max_{1 \leq k \leq m} \|x_i\|_k$ pour $x := (x_1, \cdots, x_m) \in X$. Alors $\mathbb{B}_X = \mathbb{B}_{X_1} \times \cdots \times \mathbb{B}_{X_m}$ et donc $\mathbb{B}_X$ est compact dans X pour la topologie produit des topologies $w(X_k, X_k^*)$, car chaque $\mathbb{B}_{X_k}$ est $w(X_k, X_k^*)$-compact dans X_k d'après le théorème de caractérisation 17.4 de la réflexivité. Nous déduisons de ceci et de l'analyse précédant le corollaire que $\mathbb{B}_X$ est $w(X, X^*)$-compact, ce qui à travers le même théorème de caractérisation de la réflexivité entraîne que $(X, \| \|)$ est réflexif. ■

Considérons maintenant le cas d'espaces isomorphes.

Corollaire 17.7 *Soient $(X, \| \|_X)$ et $(Y, \| \|_Y)$ deux $\mathbb{K}$-espaces de Banach. Supposons que $(X, \| \|_X)$ soit réflexif et qu'il existe un* **isomorphisme***, i.e. une application $\mathbb{K}$-linéaire bijective et bicontinue, de $(X, \| \|_X)$ sur $(Y, \| \|_Y)$. Alors l'espace $(Y, \| \|_Y)$ est réflexif.*

Démonstration. Notons Λ l'isomorphisme de $(X, \| \|_X)$ sur $(Y, \| \|_Y)$. Par continuité de Λ^{-1} il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\|x\|_X \leq \alpha \|\Lambda(x)\|_Y$ pour tout $x \in X$, ce qui implique $\mathbb{B}_Y \subset \alpha\Lambda(\mathbb{B}_X)$. Nous savons que la $(\| \|_X, \| \|_Y)$-continuité de Λ assure sa $(w(X, X^*), w(Y, Y^*))$-continuité (car les espaces X et Y sont de Banach), donc $\Lambda(\mathbb{B}_X)$ est $w(Y, Y^*)$-compact (car $\mathbb{B}_X$ est $w(X, X^*)$-compact). Ainsi $\mathbb{B}_Y$ est $w(Y, Y^*)$-compact en tant qu'ensemble $w(Y, Y^*)$-fermé contenu dans le $w(Y, Y^*)$-compact $\alpha\Lambda(\mathbb{B}_X)$. D'où la réflexivité de $(Y, \| \|_Y)$ d'après le théorème 17.4 de caractérisation de la réflexivité. ■

Le quatrième corollaire étudie la réflexivité de l'espace dual.

Corollaire 17.8 *Soit $(X, \| \|)$ un $\mathbb{K}$-espace de Banach. Les trois assertions suivantes sont équivalentes entre elles.*
(a) L'espace $(X, \| \|)$ est réflexif;
(b) Les topologies $w(X^*, X)$ et $w(X^*, X^{**})$ coincident;
(c) L'espace $(X^*, \| \|_*)$ (dual topologique de $(X, \| \|)$) est réflexif.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b)$. Supposons que $(X, \| \ \|)$ soit réflexif. Alors l'injection naturelle $J : X \to X^{**}$ est par définition surjective. Ainsi pour chaque $u^{**} \in X^{**}$ il existe un $u \in X$ tel que $u^{**} = J(u)$ donc en particulier $|u^{**}(x^*)| = |x^*(u)|$ pour tout $x^* \in X^*$. Ainsi chaque semi-norme $|\langle u^{**}, \cdot \rangle_{X^{**},X^*}|$ engendrant la topologie $w(X^*, X^{**})$ est l'une des semi-normes (ici $|\langle \cdot, u \rangle_{X^*,X}|$) qui engendrent la topologie $w(X^*, X)$, et donc $w(X^*, X^{**}) \subset w(X^*, X)$. En fait il y a égalité, puisque l'inclusion inverse a toujours lieu. D'où (b).
$(b) \Rightarrow (c)$. Comme l'ensemble $\mathbb{B}_{X^*}$ est $w(X^*, X)$-compact d'aprés le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, l'hypothèse (b) nous assure qu'il est $w(X^*, X^{**})$-compact. Il résulte alors de ceci et du théorème 17.4 de caractérisation de la réflexivité que $(X^*, \| \ \|_*)$ est réflexif.
$(c) \Rightarrow (a)$. Supposons maintenant que $(X^*, \| \ \|_*)$ soit réflexif. Les implications $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ nous assurent que $(X^{**}, \| \ \|_{**})$ is réflexif. Comme $J(X)$ est (toujours) $\| \ \|_{**}$-fermé dans X^{**} (voir le commentaire juste avant la proposition 17.3), alors muni de la norme induite par $\| \ \|_{**}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $J(X)$ est réflexif en tant que sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach réflexif (voir le corollaire 17.5). L'application $J_0 : X \to J(X)$ définie par $J_0(x) := J(x)$ pour tout $x \in X$ étant un isomorphisme de $(X, \| \ \|)$ sur $J(X)$ muni de la norme induite par $\| \ \|_{**}$, le corollaire 17.7 entraîne que $(X, \| \ \|)$ est réflexif. ■

18 Séparabilité d'un espace de Banach

Comparons tout d'abord la séparabilité d'un espace normé et plus gnéralement d'un espace localement convexe avec la séparabilité pour la topologie faible.

Proposition 18.1 *Un K-espace vectoriel localement convexe séparé $(X, \mathcal{O})$ est faiblement séparable (i.e. $w(X, X^*)$-séparable) si et seulement s'il est $\mathcal{O}$-séparable.*

Démonstration. Si X est $\mathcal{O}$-séparable, alors il est trivialement $w(X, X^*)$-séparable car la topologie $w(X, X^*)$ est incluse dans la topologie $\mathcal{O}$. Supposons inversement que X soit $w(X, X^*)$-séparable et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite $w(X, X^*)$-dense dans X. Pour $E := \mathrm{Vect}\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ on a donc $\mathrm{adh}_{\mathrm{w(X,X^*)}} E = X$. Ainsi, E étant convexe en tant qu'espace vectoriel, le théorème de Mazur nous assure que $X = \mathrm{adh}_{\mathcal{O}} E$. Cette dernière égalité nous permet de voir (**Exer**) que l'ensemble dénombrabe $\{\sum_{k=0}^{m} q_k u_k : m \in \mathbb{N},\ q_k \in \mathbb{D}\}$ est $\| \ \|$-dense dans X, où $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{D} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. D'où la $\mathcal{O}$-séparabilité de X. ■

Le prochain résultat établit que la séparabilité du dual topologique entraîne celle de l'espace de Banach initial. Sa démonstration utilise le lemme topologique général suivant.

Lemme 18.2 *Si un espace* **métrique** (X, d) *est séparable, alors tout sous-ensemble de X est séparable pour la distance induite.*

Démonstration. Soit Y un sous-ensemble non vide de X et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X dont l'ensemble des points est dense dans X. Soit $J := \{(n, k) \in \mathbb{N}^2 : B(x_n; \frac{1}{k+1}) \cap Y \neq \emptyset\}$. Pour chaque $(n, k) \in J$ choisissons un $y_{n,k} \in B(x_n; \frac{1}{k+1}) \cap Y$. On vérifie sans difficulté (**Exer**) que l'ensemble dénombrable $\{y_{n,k} : (n, k) \in J\}$ est dense dans Y pour la distance induite. ■

Rappelons que la sphère unité d'un espace normé $(X, \| \ \|)$ est notée $\mathbb{S}_X$ ou $\mathbb{S}_{\| \ \|}$, i.e.

$$\boxed{\mathbb{S}_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}}.$$

Proposition 18.3 *Soit* $(X, \| \ \|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé tel que* $(X^*, \| \ \|_*)$ *soit séparable. Alors* $(X, \| \ \|)$ *est séparable.*

Démonstration. Nous pouvons évidement supposer que X n'est pas réduit à zéro. D'après le lemme précédent la sphère unité $\mathbb{S}_{X^*}$ est $\| \ \|_*$-séparable et donc nous pouvons fixer une suite $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{S}_{X^*}$ qui est $\| \ \|_*$-dense dans $\mathbb{S}_{X^*}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, puisque $1 = \|u_n^*\|_* = \sup\limits_{x\in\mathbb{S}_X} |u_n^*(x)|$, nous pouvons choisir $x_n \in \mathbb{S}_X$ tel que $|u_n^*(x_n)| > 1/2$. Soit $\mathbb{D} := \mathbb{Q}$ if $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{D} := \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ if $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et soit $E := \{\sum\limits_{j=0}^{m} q_j x_j : m \in \mathbb{N},\ q_j \in \mathbb{D}\}$. Il est facile (**Exer**) de voir que l'ensemble E est dénombrable et que son adhérence $\mathrm{adh}_X E$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel fermé de $(X, \| \ \|)$. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{adh}_X E = X$. Supposons que ce ne soit le cas. Il découle alors du théorème de séparation de Hahn-Banach qu'il existe un $a^* \in X^*$ avec $\|a^*\|_* = 1$ tel que $a^*(x) = 0$ pour tout $x \in E$. Par densité de la suite $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{S}_{X^*}$ choisissons un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_k^* - a^*\|_* < 1/4$. Alors

$$0 = |a^*(x_k)| \geq |u_k^*(x_k)| - |(u_k^* - a^*)(x_k)| \geq |u_k^*(x_k)| - \|u_k^* - a^*\| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

ce qui est absurde. La démonstration est donc terminée. ■

La proposition ci-dessus nous dit que

$$\boxed{\big[\,(X^*, \| \ \|_*) \text{ séparable}\,\big] \Rightarrow \big[\,(X, \| \ \|) \text{ séparable}\,\big]}.$$

Par contre l'implication inverse n'a pas lieu, i.e.

$$\boxed{\big[(X, \| \ \|) \text{ séparable}\,\big] \not\Rightarrow \big[\,(X^*, \| \ \|_*) \text{ séparable}\,\big]}.$$

On verra, comme contre-exemple dans le prochain paragraphe, que l'espace normé $X := l^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ des suites réelles $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\zeta(k)| < +\infty$ muni de la norme $\|\zeta\|_1 := \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\zeta(k)|$ est séparable mais que son dual topologique $(X^*, \| \ \|_*)$ est isométriquement isomorphe à l'espace **non séparable** $l^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ des suites réelles bornées $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ muni de norme $\|\zeta\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\zeta(k)|$.

Toutefois la proposition ci-dessous établit (entre autres) que la séparabilté de $(X, \| \ \|)$ entraîne la séparabilité *-faible de X^*.

Proposition 18.4 *Soit* $(X, \| \ \|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* **normé séparable** *non réduit à zéro. Alors les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Pour $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *désignant une suite* $\| \ \|$*-dense dans* $\mathbb{S}_X$ *(resp. dans* $\mathbb{B}_X$*) et*

$$d(x^*, y^*) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} |(x^* - y^*)(u_k)|,$$

la fonction d *est une distance sur* $\mathbb{B}_{X^*}$ *et la topologie associée à* d *coincide avec la topologie induite par* $w(X^*, X)$ *sur la boule* $\mathbb{B}_{X^*}$ *qui est* $w(X^*, X)$*-compacte.*
(b) Par conséquent la boule unité $\mathbb{B}_{X^*}$ *du dual topologique est un* $w(X^*, X)$*-compact métrisable, et donc* $\mathbb{B}_{X^*}$ *et* X^* *sont* $w(X^*, X)$*-séparables.*

Démonstration. (a) Notons τ la topologie induite par $w(X^*, X)$ sur $\mathbb{B}_{X^*}$. Observons que la boule $\mathbb{B}_{X^*}$ est τ-compacte car elle est $w(X^*, X)$-compacte d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki. De plus il n'est pas difficile (**Exer**) de vérifier que d est une distance sur $\mathbb{B}_{X^*}$. Montrons que l'application identité de $\mathbb{B}_{X^*}$, notée I, est (τ, d)-continue sur $\mathbb{B}_{X^*}$. Soit $(x_j^*)_{j\in J}$ une suite généralisée de $\mathbb{B}_{X^*}$ qui τ-converge (donc $w(X^*, X)$-converge) vers un $a^* \in \mathbb{B}_{X^*}$ et soit un réel $\varepsilon > 0$ fixé. Choisissons un entier K tel que $\sum\limits_{k=K+1}^{\infty} 1/2^k < \varepsilon/2$. Par propriété de $w(X^*, X)$-convergence, nous pouvons trouver un $j_0 \in J$ tel que pour tout $j \in J$ vérifiant $j_0 \preceq j$ on ait

$$\max_{0\leq k\leq K} |(x_j^* - a^*)(u_k)| < \frac{\varepsilon}{2(K+1)}.$$

Par conséquent pour tout $j \in J$ avec $j_0 \preceq j$ on a

$$d(x_j^*, a^*) \leq \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{2^{k+1}} |(x_j^* - a^*)(u_k)| + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Ainsi l'application bijective I de $\mathbb{B}_{X^*}$ est bien (τ, d)-continue et donc, compte tenu de la τ-compacité de $\mathbb{B}_{X^*}$, elle est un homéorphisme de (B_{X^*}, τ) sur (B_{X^*}, d), i.e. la topologie τ coincide avec la topologie sur $\mathbb{B}_{X^*}$ associée à d. Nous avons donc établi (a).
(b) Comme l'ensemble $\mathbb{B}_{X^*}$ est, d'après (a), $w(X^*, X)$-compact métrisable, il est évidemment $w(X^*, X)$-séparable. De ceci et de l'égalité $X^* = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{B}_{X^*}$, on déduit aisément (**Exer**) que X^* est $w(X, X^*)$-séparable. $\blacksquare$.

19 Théorème d'Eberlein-Šmulian

Nous allons dans ce paragraphe établir qu'un ensemble faiblement fermé d'un espace de Banach est faiblement compact si et seulement si de toute **suite (ordinaire)** de points de l'ensemble on peut extraire une sous-suite faiblement convergente. L'importance de ce résultat réside dans le fait que l'on ne sait pas en général que la topologie induite sur un tel ensemble par la topologie faible est métrisable.

Commençons par établir les deux lemmes suivants qui seront utilisés pour l'implication $\Leftarrow$ du résultat résumé ci-dessus. Pour un ensemble non vide $G \subset X^{**}$ et $\varphi \in X^{**}$ nous noterons $\mathrm{dist}_{\|\ \|_{**}}(\varphi, G)$ la distance de φ à l'ensemble G relativement à la norme $\|\ \|_{**}$.

Lemme 19.1 (Construction de Whitley) *Soient un $\mathbb{K}$-espace de Banach $(X, \|\ \|)$, un sous-ensemble non vide $A \subset X$ et $\varphi \in X^{**}$ tel que $\varphi \in \big(\mathrm{adh}_{w(X^{**},X^*)} J(A)\big) \setminus J(X)$, où $J : X \to X^{**}$ désigne l'injection canonique (naturelle) de X dans X^{**}. Alors pour $r := \mathrm{dist}_{\|\ \|_{**}}(\varphi, J(X))$ on a $r > 0$ et il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A et une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{B}_{X^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait*
(I) $|\varphi(\psi_n)| > 3r/4$,
(II) $|\psi_n(a_k)| < r/4$ pour $k < n$ et $|\psi_n(a_k)| > 3r/4$ pour $k \geq n$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut en fait remplacer (I) et (II) par (I') et (II')
(I') $\varphi(\psi_n) > 3r/4$,
(II') $|\psi_n(a_k)| < r/4$ pour $k < n$ et $\psi_n(a_k) > 3r/4$ pour $k \geq n$.

Démonstration. Observons que $r := \mathrm{dist}_{\|\ \|_{**}}(\varphi, J(X)) > 0$ car $J(X)$ est $\|\ \|_{**}$-fermé dans X^{**}. Nous allons construire par récurrence les deux suites vérifiant (I) et (II).

D'une part, comme $\|\varphi\|_{**} \geq r > 3r/4$, nous pouvons choisir $\psi_0 \in \mathbb{B}_{X^*}$ vérifiant (I), et d'autre part l'inclusion $\varphi \in \mathrm{adh}_{w(X^{**},X^*)}\, J(A)$ nous permet de choisir $a_0 \in A$ vérifiant $|(\varphi - J(a_0))(\psi_0)| < |\varphi(\psi_0)| - 3r/4$ ce qui implique $|\psi_0(a_0)| = |J(a_0)(\psi_0)| > |\varphi(\psi_0)| - (|\varphi(\psi_0)| - 3r/4) = 3r/4$. Ainsi les propriétés (I) et (II) sont obtenues à l'étape $n = 0$.

Supposons construits $a_0, \cdots, a_n$ et $\psi_0, \cdots, \psi_n$ vérifiant (I) et (II). Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $V := \mathrm{Vect}\{J(a_0), \cdots, J(a_n)\}$ et remarquons que $\mathrm{dist}_{\|\ \|_{**}}(\varphi, V) =: \rho \geq r$. La fonction $g : V + \mathbb{K}\varphi \to \mathbb{K}$, définie par $g(v + t\varphi) := t\rho$ pour tous $v \in V$ et $t \in \mathbb{K}$ est $\mathbb{K}$-linéaire et vérifie pour tous $v \in V$ et $t \in \mathbb{K}$

$$|g(v + t\varphi)| = |t|\mathrm{dist}_{\|\ \|_{**}}(\varphi, V) = \mathrm{dist}_{\|\ \|_{**}}(t\varphi, V) \leq \|v + t\varphi\|_{**},$$

la dernière inégalité résultant de l'inclusion $-v \in V$. D'après le théorème de Hahn-Banach nous pouvons prolonger g en une forme $\mathbb{K}$-linéaire $\|\ \|_{**}$-continue $h : X^{**} \to \mathbb{K}$ de même norme. Il en découle que $h \in \mathbb{B}_{X^{***}}$, $h(v) = 0$ pour tout $v \in V$ et $h(\varphi) = \rho \geq r$. D'après le théorème de Goldstine, il existe $\psi_{n+1} \in \mathbb{B}_{X^*}$ tel que $|h(\varphi) - \psi_{n+1}(\varphi)| < r/4$ et $|h(J(a_k)) - \psi_{n+1}(a_k)| < r/4$ pour $k = 0, \cdots, n$. Ces inégalités et les propriétés ci-dessus de h nous assurent que $|\psi_{n+1}(\varphi)| > 3r/4$ et $|\psi_{n+1}(a_k)| < r/4$ pour $k = 0, \cdots, n$. En utilisant l'inclusion $\varphi \in \mathrm{adh}_{w(X^{**},X^*)} J(A)$ nous pouvons trouver un $a_{n+1} \in A$ tel que pour chaque $k = 0, \cdots, n, n+1$ on ait $|(\varphi - J(a_{n+1}))(\psi_k)| < |\varphi(\psi_k)| - 3r/4$ ce qui implique $|\psi_k(a_{n+1})| = |J(a_{n+1})(\psi_k)| > |\varphi(\psi_k)| - (|\varphi(\psi_k)| - 3r/4) = 3r/4$. La démonstration avec le corps $\mathbb{K}$ est donc terminée.

Le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est obtenu en apportant (**Exer**) les modifications appropriées. ■

Lemme 19.2 *Soit A un sous-ensemble* **borné** *d'un $\mathbb{K}$-espace de Banach $(X, \|\ \|)$. Alors $adh_{w(X,X^*)}\, A$ est $w(X, X^*)$-compact dans X si et seulement si $adh_{w(X^{**},X^*)}\, J(A) \subset J(X)$ où $J : X \to X^{**}$ est l'injection canonique (naturelle) de X dans X^{**}.*

Démonstration. Considérons l'application $J_0 : X \to J(X)$ définie par $J_0(x) = J(x)$ pour tout $x \in X$. Les propriétés de l'injection canonique J nous assurent que J_0 est un isomorphisme de l'espace vectoriel topologique $(X, w(X, X^*))$ sur l'espace vectoriel topologique $(J(X), \omega)$ où ω désigne la topologie induite sur $J(X)$ par $w(X^{**}, X^*)$. L'ensemble $\mathrm{adh}_{w(X^{**},X^*)}\, J(A)$ étant $w(X^{**}, X^*)$-compact d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, l'équivalence du lemme s'ensuit. ■

Théorème 19.3 *(***Théorème d'Eberlein-Šmulian***) Soit A un sous-ensemble non vide d'un espace de* **Banach** *$(X, \|\ \|)$. Alors l'adhérence faible $\mathrm{adh}_{w(X,X^*)}\, A$ de A est faiblement compacte, i.e. $w(X, X^*)$-compacte, si et seulement si de toute* **suite** *de A on peut extraire une* **sous-suite** *faiblement convergente, i.e. $w(X, X^*)$-convergente, dans X.*

Démonstration. Supposons que l'ensemble $\mathrm{adh}_{w(X,X^*)}\, A$ soit $w(X, X^*)$-compact et soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A. Le $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel fermé $E := \mathrm{adh}_{\|\ \|}(\mathrm{Vect}\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ muni de la norme induite, notée $\|\ \|_E$, est séparable et donc d'après la proposition 18.4 il existe une suite $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E^* qui est $w(E^*, E)$-dense dans E^*. D'après l'une des conséquences du théorème de Hahn-Banach (analytique), chaque ψ_k peut être prolongée en une forme $\mathbb{K}$-linéaire $\|\ \|$-continue φ_k sur X (donc $\varphi_k \in X^*$) avec $\|\varphi_k\|_{X^*} = \|\psi_k\|_{E^*}$. L'ensemble $C := \mathrm{adh}_{w(X,X^*)}\, \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ étant borné dans X, la fonction d sur $C \times C$ définie par

$$d(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} |\varphi_k(x - y)| \quad \text{pour tous } x, y \in C,$$

est une distance (**Exer**) sur C. Observons aussi que pour la topologie τ induite sur C par $w(X, X^*)$, l'ensemble C est τ-compact car c'est un $w(X, X^*)$-fermé contenu dans l'ensemble $w(X, X^*)$-compact $\mathrm{adh}_{w(X,X^*)} A$. Comme dans la démonstration de la proposition 18.4, on vérifie (**Exer**) que l'application identité sur C est (τ, d)-continue et donc c'est un homéomorphisme de (C, τ) dans (C, d) à cause de la τ-compacité de C. Par conséquent le τ-compact C est métrisable, ce qui évidemment entraîne l'existence d'une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est τ-convergente et donc $w(X, X^*)$-convergente.

Supposons maintenant que de toute suite de A on peut extraire une sous-suite $w(X, X^*)$-convergente dans X. Ceci entraîne évidemment (**Exer**) que A est $\| \ \|$-borné. Tenant compte du lemme 19.2 il nous suffit de montrer que $\mathrm{adh}_{w(X^{**},X^*)} J(A) \subset J(X)$. Supposons que l'inclusion n'ait pas lieu et fixons $\varphi \in \big(\mathrm{adh}_{w(X^{**},X^*)} J(A)\big) \setminus J(X)$. Posons $r := \mathrm{dist}_{\| \ \|_{**}}(\varphi, J(X)) > 0$. Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites données par le lemme 19.1. D'après l'hypothèse sur A il existe une sous-suite $(a_{s(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui $w(X, X^*)$-converge vers un $a \in X$, où $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est stictement croissante. D'après le théorème de Mazur il existe $k \in \mathbb{N}$, un entier $K_k \geq k$ et $a'_k \in \mathrm{co}\,\{a_{s(j)} : k \leq j \leq K_k\}$ tels que $\|a'_k - a\| < r/4$. Alors la première inégalité de (II) du lemme 19.1 entraîne pour tout entier $n \geq s(K_k)$ que $|\psi_n(a'_k)| < r/4$ et donc $|\psi_n(a)| < r/2$ car $\psi_n \in \mathbb{B}_{X^*}$. Or la seconde inégalité de (II) du même lemme implique $|\psi_n(a)| \geq 3r/4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est en contradiction avec la dernière inégalité de la phrase précédente. La démonstration du théorème est terminée. ■

Comme corollaire nous avons la caractérisation séquentielle suivante de la réflexivité.

Corollaire 19.4 *Un $\mathbb{K}$-espace de Banach $(X, \| \ \|)$ est réflexif si et seulement si de toute* **suite (ordinaire) bornée** *de $(X, \| \ \|)$ on peut extraire une sous-suite* **faiblement** *convergente dans X.*

Démonstration. Supposons la réflexivité et fixons une suite bornée $(x_n)_n$ de X. Le théorème de caractérisation de la réflexivité nous dit que $\mathrm{adh}_{w(X,X^*)} \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est faiblement compact dans X, et donc d'après le théorème d'Eberlein-Šmulian la suite $(x_n)_n$ admet une sous-suite faiblement convergente.

Supposons maintenant la propriété séquentielle du corollaire. Le théorème d'Eberlein-Šmulian nous assure alors que la boule unité fermée $\mathbb{B}_X$ est faiblement compacte dans X, ce qui entraîne, d'après le théorème de caractérisation de réflexivité, que l'espace $(X, \| \ \|)$ est réflexif. ■

Remarque. L'énoncé du théorème d'Eberlein-Šmulian ainsi que celui du corollaire ci-dessus **n'ont pas lieu pour la topologie $*$-faible** $w(X^*, X)$. ■

20 Espaces vectoriels topologiques de dimension finie

Observons tout d'abord que toute application $\mathbb{K}$-linéaire de $\Lambda : \mathbb{K}^m \to Y$ de $\mathbb{K}^m$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est $\mathcal{O}_Y$-continue. En effet pour $e_1 := (1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_m := (0, \cdots, 0, 1)$ et $x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{K}^m$, en écrivant $\Lambda(x) = x_1\Lambda(e_1) + \cdots + x_m\Lambda(e_m)$ on voit que Λ est $\mathcal{O}_Y$-continue d'après la continuité du produit externe.

Théorème 20.1 *Sur tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel X de dimension finie toutes les topologies* **séparées (Hausdorff) compatibles** *avec la structure vectorielle de X coincident.*

En fait si $(v_1, \cdots, v_m)$ une base de X et si $\Phi : \mathbb{K}^m \to X$ désigne la bijection linéaire naturelle associée à cette base et définie par $\Phi(x) := x_1e_1 + \cdots + x_me_m$ pour tout $x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{K}^m$, alors, pour toute topologie **séparée (Hausdorff) $\mathcal{O}$ compatible** *avec la structure vectorielle de X, l'application Φ est bicontinue relativement à $\mathcal{O}$ et à la topologie naturelle de $\mathbb{K}^m$.*

Démonstration. Il suffit d'établir la seconde assertion. Notons τ la topologie naturelle de $\mathbb{K}^m$. D'après ce qui précède le théorème, la bijection linéaire Φ est $(\tau, \mathcal{O})$-continue. Montrons que Φ^{-1} est $(\mathcal{O}, \tau)$-continue. Notons $\|x\|_\infty := \max_{1\leq k\leq m} |x_k|$ pour $x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{K}^m$. Nous savons que la sphère unité $\mathbb{S}_{\|\ \|_\infty}$ de $\mathbb{K}^m$ est τ-compacte et donc l'ensemble $\Phi(\mathbb{S}_{\|\ \|_\infty})$ est $\mathcal{O}$-compact. Comme $0_X \notin \Phi(\mathbb{S}_{\|\ \|_\infty})$ par injectivité de Φ et comme la topologie $\mathcal{O}$ est séparée (Hausdorff), il existe un ouvert $W \ni 0_X$ tel que $W \cap \Phi(\mathbb{S}_{\|\ \|_\infty}) = \emptyset$. Par propriété d'espace vectoriel topologique, nous pouvons choisir un voisinage équilibré U de 0_X tel que $U \subset W$. Alors pour tout $u \in U$ avec $u \neq 0_X$, par bijectivité de Φ il existe $x \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $u = \Phi(x)$. Si l'on avait $\|x\|_\infty \geq 1$, l'on aurait $\frac{1}{\|x\|_\infty}\Phi(x) = \frac{1}{\|x\|_\infty}u \in U$ car U est équilibré et ceci entrainerait la contradiction $\frac{1}{\|x\|_\infty}\Phi(x) \in U \cap \Phi(\mathbb{S}_{\|\ \|_\infty})$. Par conséquent $\|x\|_\infty < 1$ et donc $U \subset \Phi\big(B_{\|\ \|_\infty}(0_{\mathbb{K}^m}; 1)\big)$. Ceci revient à dire que pour tout réel $r > 0$ on a $\Phi^{-1}(rU) \subset B_{\|\ \|_\infty}(0_{K^m}; r)$, donc Φ^{-1} est $(\mathcal{O}, \tau)$-continue. ■

De ce théorème nous déduisons les deux corollaires importants suivants.

Corollaire 20.2 (Continuité des applications linéaires sur un espace de dimension finie) *Toute application $\mathbb{K}$-linéaire Λ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique* **séparé (Hausdorff)** *$(X, \mathcal{O}_X)$ de* **dimension finie** *dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$-continue.*

En particulier toutes les formes $\mathbb{K}$-linéaires sur X sont $\mathcal{O}_X$-continues, i.e. les duaux topologiques et algébriques coincident, et donc on peut ainsi identifier X^* à X.

Démonstration. En considérant l'application Φ du théorème ci-dessus, l'analyse précédant ce théorème nous dit que $\Lambda \circ \Phi$ est $(\tau, \mathcal{O}_Y)$-continue, où τ désigne la toplogie naturelle de $\mathbb{K}^m$ pour $m = \dim X$. Comme Φ est bicontinue d'après le même théorème, la continuité de Λ en découle. ■

Corollaire 20.3 (Caractère fermé des sous-espaces de dimension finie) *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique* **séparé (Hausdorff)** *$(X, \mathcal{O})$, tout $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de dimension finie E est $\mathcal{O}$-fermé.*

Démonstration. Notons m la dimension de E et supposons $m \neq 0$ (sinon le résultat est trivial). Notons $\mathcal{O}_E$ la topologie induite par $\mathcal{O}$ sur E et τ la topologie naturelle de $\mathbb{K}^n$. La topologie $\mathcal{O}_E$ est séparée et compatible avec la structure vectorielle de E. L'espace $(\mathbb{K}^m, \tau)$ étant complet, le théorème ci-dessus nous assure via son application Φ que $(E, \mathcal{O}_E)$ est complet. Par conséquent l'ensemble E est $\mathcal{O}$-complet dans X et donc à fortiori $\mathcal{O}$-fermé. ■

Donnons une caractérisation topologique des espaces de dimension finie.

Théorème 20.4 *(***Théorème de Riesz caractérisant topologiquement les espaces de dimension finie***) Soit $(X, \mathcal{O})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique* **séparé (Hausdorff)**. *Alors cet $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de* **dimension finie** *si et seulement s'il existe un $\mathcal{O}$-***voisinage** *$\mathcal{O}$-compact de 0_X.*

Démonstration. Si X est de dimension finie $m \neq 0$, le théorème 20.1 évidemment entraîne que $\Phi(\mathbb{B}_{\|\ \|_\infty})$ est un $\mathcal{O}$-voininage $\mathcal{O}$-compact de 0_X.

Supposons inversement qu'il existe un voisinage $\mathcal{O}$-compact V de 0_X. Alors il existe un voisinage équlibré et ouvert U de 0_X tel que $U \subset V$. Par compacité de V il existe $v_1, \cdots, v_m \in V$ tels que $V \subset \bigcup_{k=1}^{m} (v_k + \frac{1}{2}U)$ et donc pour le $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de dimension finie $E := \mathrm{Vect}\{v_1, \cdots, v_m\}$ nous avons $V \subset E + \frac{1}{2}U$, ce qui entraîne particulier

$$U \subset E + \frac{1}{2}U. \tag{20.1}$$

Fixons $u \in U$ quelconque. D'après (20.1) il existe $e_1 \in E$ et $u_1 \in U$ tel que $u = e_1 + \frac{1}{2}u_1$. En Appliquant à nouveau (20.1) à u_1 nous obtenons $e_2' \in E$ et $u_2 \in U$ tel que $u_1 = e_1' + \frac{1}{2}u_2$ et donc pour $e_2 := e_1 + \frac{1}{2}e_2' \in E$ nous avons $u = e_2 + \frac{1}{2^2}u_2$. Nous pouvons donc construire par récurrence une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ de E et une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de U telles que $u = e_n + \frac{1}{2^n}u_n$ pour tout $n \geq 1$. Comme l'ensemble V est $\mathcal{O}$-borné, la suite $(\frac{1}{2^n}u_n)_n$ $\mathcal{O}$-converge vers 0_X quand $n \to \infty$ et donc $(e_n)_n$ $\mathcal{O}$-converge vers u quand $n \to \infty$. L'ensemble E étant $\mathcal{O}$-fermé d'après le corollaire 20.3, nous obtenons $u \in E$, donc $U \subset E$. Puisque U est absorbant, il est aisé de déduire de cette dernière inclusion que $X \subset E$, i.e. $X = E$. Ceci termine la démonstration. ∎

21 Espaces de suites

Nous rappelons qu'une suite de $\mathbb{K}$ est par définition une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. Nous noterons donc $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les suites de $\mathbb{K}$. Comme $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même, $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Dans ce qui suit l'élément générique de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ sera en général noté ζ. Des fois il sera plus commode de noter $(\zeta(k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour désigner la suite ζ.

Notre étude commence avec l'espace des suites bornées que l'on note $l^\infty_\mathbb{K}(\mathbb{N})$ ou seulement $l^\infty(\mathbb{N})$ ou l^∞ quand il n'y a pas de risque d'ambiguité. Ainsi

$$\boxed{l^\infty_\mathbb{K}(\mathbb{N}) := \{\zeta \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K}) : \sup_{k\in\mathbb{N}} |\zeta(k)| < +\infty\}}.$$

On vérifie aisément (**Exer**) que c'est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ et que la fonction $\| \, \|_\infty$ définie dessus par

$$\boxed{\|\zeta\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |\zeta(k)| \quad \text{pour tout } \zeta \in l^\infty_\mathbb{K}(\mathbb{N})}$$

est une norme.

Proposition 21.1 *Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(l^\infty_\mathbb{K}(\mathbb{N}), \| \, \|_\infty)$ est un $\mathbb{K}$-espace de Banach* **non séparable**.

Démonstration. On laisse à titre **d'exercice** la démonstration que l'espace est complet. Montrons qu'il n'est pas séparable. Notons $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties non vides de $\mathbb{N}$ et $E := \{\mathbb{1}_P : P \in \mathcal{P}_0(\mathbb{N})\}$. Evidemment $E \subset l^\infty_\mathbb{K}(\mathbb{N})$. Pour conclure que $(l^\infty_\mathbb{K}(\mathbb{N}), \| \, \|_\infty)$ n'est pas séparable il nous suffit, compte tenu du lemme 18.2, de montrer que E muni de la distance induite n'est pas séparable. Supposons que ce ne soit pas le cas, i.e. il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ telle que l'ensemble $\{\mathbb{1}_{P_n} : n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans E. Comme $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable, il existe un $P \in \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ tel que $P \neq P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, par définition de $\| \, \|_\infty$ on a

$$\|\mathbb{1}_{P_n} - \mathbb{1}_P\|_\infty = 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ceci imlique que $\mathbb{1}_P \notin \mathrm{adh}_{\| \, \|_\infty}(\{\mathbb{1}_{P_n} : n \in \mathbb{N}\})$, ce qui est en contradiction avec le choix de la suite $(\mathbb{1}_{P_n})_{n\in\mathbb{N}}$. La démonstration est donc terminée. ∎

Définissons maintenant les espaces

$$\boxed{c_\mathbb{K}(\mathbb{N}) := \{\zeta \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K}) : \lim_{k\to\infty} \zeta(k) \text{ existe dans } \mathbb{K}\}, \;\; c^0_\mathbb{K}(\mathbb{N}) := \{\zeta \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K}) : \lim_{k\to\infty} \zeta(k) = 0\}},$$

$$\boxed{c^{00}_\mathbb{K}(\mathbb{N}) := \{\zeta \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K}) : \exists k_\zeta \in \mathbb{N}, \, \zeta(k) = 0 \; \forall k \geq k_\zeta + 1\}}.$$

On a évidemment

$$\boxed{c^{00}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \subset c^{0}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \subset c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \subset l^{\infty}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})}$$

et ce sont des $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de $l^{\infty}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. On peut donc considérer sur chacun des trois la norme induite par $\| \|_\infty$ que nous notons encore (sauf mention contraire) $\| \|_\infty$.

Pour $\mathbb{D} := \mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{D} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il sera commode de remarquer que pour chaque $q \in \mathbb{D}$ et chaque $m \in \mathbb{N}$ l'ensemble

$$E_{q,m} := \{\zeta \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{D}) : \zeta(k) = q \ \forall k \geq m+1\} \tag{21.1}$$

(qui n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) est en bijection avec $\mathbb{D}^{m+1}$ et donc est dénombrable. Ainsi l'ensemble $\bigcup\limits_{q\in\mathbb{D}, m\in\mathbb{N}} E_{q,m}$ est dénombrable.

Proposition 21.2 *Avec les notations ci-dessus, les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $(c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \|_\infty)$ et $(c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \|_\infty)$ sont complets et $(c^{00}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \|_\infty)$ n'est pas complet.
(b) Les espaces $(c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \|_\infty)$ et $(c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \|_\infty)$ sont séparables car les ensembles $\bigcup\limits_{q\in\mathbb{D}, m\in\mathbb{N}} E_{q,m}$ et $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} E_{0,m}$ y sont respectivement denses.

Démonstration. (1) Pour établir la complétude des deux premiers espaces de (a), il suffit de montrer qu'ils sont fermés dans $(l^{\infty}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \|_\infty)$.

Commençons avec $c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. Soit $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ tendant vers ζ dans $(l^{\infty}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \|_\infty)$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Observons que pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$|\zeta(k)-\zeta(k')| \leq |\zeta(k)-\zeta_n(k)|+|\zeta_n(k)-\zeta_n(k')|+|\zeta_n(k')-\zeta(k')| \leq 2\|\zeta_n-\zeta\|_\infty+|\zeta_n(k)-\zeta_n(k')|. \tag{21.2}$$

Ce qui précède nous incite à choisir, par définition de convergence, un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait $\|\zeta_n - \zeta\|_\infty \leq \varepsilon/3$. Comme $\lim\limits_{k\to\infty} \zeta_N(k)$ existe dans $\mathbb{K}$, il existe un entier $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous entiers $k, k' \geq K_\varepsilon$ on ait $|\zeta_N(k) - \zeta_N(k')| \leq \varepsilon/3$. Il découle de tout ceci et de (21.2) que pour tous entiers $k, k' \geq K_\varepsilon$ on a $|\zeta(k) - \zeta(k')| \leq \varepsilon$. La suite $(\zeta(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est ainsi de Cauchy dans $\mathbb{K}$ et donc sa limite existe dans $\mathbb{K}$. Par conséquent, l'ensemble $c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ est bien fermé dans $(l^{\infty}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \|_\infty)$.

Le cas de $c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ est laissé à **titre d'exercice**.

(2) Montrons que $E = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} E_{0,m}$ est dense $(c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \|_\infty)$. Soit $\zeta \in c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{k\to\infty} = 0$, il existe un entier $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geq K+1$ on ait $|\zeta(k)| \leq \varepsilon$. Par densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{K}$ choisissons pour chaque $k = 0, \cdots, K$ un $q_k \in \mathbb{D}$ tel que $|q_k - \zeta(k)| \leq \varepsilon$. En posant $\zeta_\varepsilon(k) = q_k$ si $k \leq K$ et $\zeta_\varepsilon(k) = 0$ si $k \geq K+1$ nous voyons que $\zeta_\varepsilon \in E$ et $\|\zeta_e - \zeta\| \leq \varepsilon$, ce qui nous assure la densité voulue.

On démontre de façon similaire (**Exer**) la densité de $\bigcup\limits_{q\in\mathbb{D}, m\in\mathbb{N}} E_{q,m}$ dans $(c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \|_\infty)$.

(3) Enfin, d'après (b) nous avons $\mathrm{adh}_{l^\infty}(c^{00}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})) = c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et donc $c^{00}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ n'est pas fermé dans $(l^{\infty}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \|_\infty)$. ■

Commençons maintenant par observer que pour tous réels $p, a, b \geq 0$ nous avons

$$(a+b)^p \leq 2^p(\max\{a,b\})^p = 2^p \max\{a^p, b^p\} \leq 2^p(a^p + b^p),$$

ce qui correspond à

$$\boxed{(a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p) \quad \text{pour } p,a,b \geq 0}. \tag{21.3}$$

Dans tout le reste du paragraphe sauf mention contraire p est un **réel** de $[1,+\infty[$. Considérons l'ensemble

$$\boxed{l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) := \{\zeta \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K}) : \sum_{k=0}^{\infty} |\zeta(k)|^p < +\infty\}}.$$

L'inégalité (21.3) ci-dessus nous assure que $l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ est un **$\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel** de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ (**Exer**). Définissons dessus la fonction $\| \ \|_p$ par

$$\boxed{\|\zeta\|_p := \big(\sum_{k=0}^{\infty} |\zeta(k)|^p\big)^{1/p} \quad \text{pour tout } \zeta \in l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})}.$$

Nous allons montrer que c'est une norme. Pour $p \in [1,+\infty]$ fixons $p' \in [1,+\infty]$ tel que

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \ \text{ i.e. } \ \frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}}.$$

On dit que p' est **l'exposant conjugué** de p. Etablissons d'abord l'inégalité de Young suivante.

Lemme 21.3 (Inégalité de Young) *Pour tous réels $a,b \geq 0$ et pour $p \in]1,+\infty[$ on a*

$$\boxed{ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}}.$$

Démonstration. Nous pouvons supposer $a,b \neq 0$, car sinon le résultat est trivial. La dérivée seconde de la fonction $-\ln$ étant > 0 sur $]0,+\infty[$, elle est convexe sur cet intervalle et donc pour $a,b > 0$ nous avons

$$-\ln(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^p) \leq -\frac{1}{p}\ln(a^p) - \frac{1}{p'}\ln(b^{p'}) = -\ln(ab),$$

ce qui est équivalent à l'inégalité voulue. ■

Via l'inégalité de Young nous allons montrer l'inégalité de Hölder.

Lemme 21.4 (Inégalité de Hölder) *Soit $p \in [1,+\infty]$. Pour $\zeta \in l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et $\xi \in l^{p'}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ on a $\zeta\xi \in l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et*

$$\|\zeta\xi\|_1 \leq \|\zeta\|_p \, \|\xi\|_{p'}.$$

Démonstration. Nous pouvons supposer $1 < p < +\infty$, car sinon le résultat est trivial. Alors d'après l'inégalité de Young nous avons pour chaque $k \in \mathbb{N}$

$$|\zeta(k)\xi(k)| \leq \frac{1}{p}|\zeta(k)|^p + \frac{1}{p'}|\xi(k)|^{p'},$$

ce qui entraîne d'une part que $\zeta\xi \in l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et d'autre part que

$$\|\zeta\xi\|_1 \leq \frac{1}{p}\|\zeta\|_p{}^p + \frac{1}{p'}\|\xi\|_{p'}{}^{p'}.$$

Ceci nous assure pour tout réel $r > 0$ avec $r\zeta$ à la place de ζ que

$$\|\zeta\xi\|_1 \leq \frac{r^{p-1}}{p}(\|\zeta\|_p)^p + \frac{1}{rp'}(\|\xi\|_{p'})^{p'},$$

et donc le choix de $r := (\|\zeta\|_p)^{-1}(\|\xi\|_{p'})^{p'/p}$ (pour $\|\zeta\|_p \neq 0$) fournit l'inégalité voulue. ■

Proposition 21.5 *Pour tout réel* $p \in [1, +\infty[$ *la fonction* $\| \ \|_p$ *est une norme sur le* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

Démonstration. Fixons $\zeta, \xi \in l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et écrivons

$$|\zeta(k)+\xi(k)|^p = |\zeta(k)+\xi(k)|^{p-1}|\zeta(k)+\xi(k)| \leq |\zeta(k)+\xi(k)|^{p-1}|\zeta(k)|+|\zeta(k)+\xi(k)|^{p-1}|\xi(k)|. \quad (21.4)$$

Pour $\rho(k) := |\zeta(k) + \xi(k)|^{p-1}$ nous observons que $|\rho(k)|^{p'} = |\zeta(k) + \xi(k)|^{(p-1)p'} = |\zeta(k) + \xi(k)|^p$ et donc $\rho \in l^{p'}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ car $\zeta + \xi \in l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ puisque $l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel. Il découle de ceci, de (21.4) et de l'inégalté de Hölder que

$$(\|\zeta + \xi\|_p)^p \leq \|\rho\|_{p'}\|\zeta\|_p + \|\rho\|_{p'}\|\xi\|_p.$$

En écrivant

$$\|\rho\|_{p'} = (\sum_{k=0}^{\infty} |\rho(k)|^{p'})^{1/p'} = (\sum_{k=0}^{\infty} |\zeta(k) + \xi(k)|^p)^{1/p'} = (\|\zeta + \xi\|_p)^{p/p'} = (\|\zeta + \xi\|_p)^{p-1}$$

et en reportant dans la dernière inégalité ci-dessus nous obtenons $\|\zeta + \xi\|_p \leq \|\zeta\|_p + \|\xi\|_p$. Nous concluons donc que $\| \ \|_p$ est une norme sur $l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ car pour $t \in \mathbb{K}$ l'égalité $\|t\zeta\|_p = |t| \, \|\zeta\|_p$ est triviale. ■

Etablissons maintenant la complétude et la séparabilité pour $p \in [1, +\infty[$.

Proposition 21.6 *Pour tout réel* $p \in [1, +\infty[$ *le* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé* $(l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_p)$ *est complet et séparable.*

Démonstration. Fixons $p \in [1, +\infty[$. Soit $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_p)$ et soit un réel $\varepsilon > 0$ fixé. Fixons un entier $N \in \mathbb{N}$ (dépendant de ε mais indépendant de k) tel que pour tous entiers $m, n \geq N$ on ait

$$\|\zeta_n - \zeta_n\|_p \leq \varepsilon \ \text{ i.e. } \sum_{j=0}^{\infty} |\zeta(j) - \xi(j)|^p \leq \varepsilon^p. \quad (21.5)$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ fixé, nous avons alors pour tous $m, n \geq N$ l'inégalité $|\zeta_n(k) - \zeta_m(k)|^p \leq \varepsilon^p$, i.e. $|\zeta_n(k) - \zeta_m(k)| \leq \varepsilon$. Ainsi la suite $(\zeta_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n(k)$ existe dans $\mathbb{K}$ et ceci nous permet de définir une fonction $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ en posant $\zeta(k) := \lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Montrons que $\zeta \in l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. Fixons $n \geq N$ quelconque. Compte tenu de (21.5) nous avons pour chaque entier $\mathbb{K} \geq N$ l'inégalité $\sum\limits_{k=0}^{K} |\zeta_n(k) - \zeta_m(k)|^p \leq \varepsilon^p$ et ceci, en faisant $m \to +\infty$, entraîne $\sum\limits_{k=0}^{K} |\zeta_n(k) - \zeta(k)|^p \leq \varepsilon^p$. Ceci étant vrai pour tout $K \geq N$, nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\zeta_n(k) - \zeta(k)|^p \leq \varepsilon^p. \quad (21.6)$$

Ainsi $\zeta_n - \zeta \in l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et comme par ailleurs $\zeta_n \in l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, la structure vectorielle de $l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ nous assure que $\zeta \in l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

L'inégalité (21.6) peut maintenant peut être reécrite sous la forme $\|\zeta_n - \zeta\|_p \leq \varepsilon$ pour tout entier $n \geq N$, ce qui traduit que la convergence vers ζ de la suite $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci achève la démonstration de la complétude désirée.

Montrons maintenant la densité de l'ensemble dénombrable $E_0 := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_{0,m}$, avec $E_{0,m}$ comme considéré dans (21.1), dans $(l^p_{\mathbb{K}}, \| \ \|_p)$. Cet ensemble est évidemment inclus dans $l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. Fixons $\zeta \in l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et un réel $\varepsilon > 0$. Comme $\sum k = 0^\infty |\zeta(k)|^p < +\infty$, il existe un entier $K \in \mathbb{N}$ tel que $\sum k = K + 1^\infty |\zeta(k)|^p < \varepsilon^p/2$. D'autre part, la densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{K}$ nous permet de choisir, pour chaque $k = 0, \cdots, K$ un $q_k \in \mathbb{D}$ tel que $|\zeta(k) - q_k|^p \leq \varepsilon^p/(2(K+1))$ et donc $\sum_{k=0}^{K} |\zeta(k) - q_k|^p \leq \varepsilon^p/2$. En posant $\xi(k) = q_k$ pour $k = 0, \cdots, K$ et $\xi(k) = 0$ pour $k \geq K+1$ nous définissons un élément $\xi \in E_0$ et $\sum |\zeta(k) - \xi(k)|^p \leq \varepsilon^p$, i.e. $\|\zeta - \xi\|_p \leq \varepsilon$. D'où la densité voulue. ■

La suite ce paragraphe est consacrée à l'étude des duaux topologiques des divers espaces de suites introduits ci-dessus. Commençons avec celui de $c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. Pour chaque entier $j \in \mathbb{N}$ nous noterons e_j la suite $e_j : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ définie par $e_j(k) = 1$ si $k = j$ et $e_j(k) = 0$ si $k \neq j$. Evidemment $e_j \in c^{00}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

Proposition 21.7 *Soient $X = c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et $X^* := (X, \| \ \|_\infty)^*$. Pour chaque $u \in l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ la fonction $\Phi(u) : E \to \mathbb{K}$ définie par*

$$\boxed{\Phi(u)(\zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\zeta(k) \quad \textit{pour tout } \zeta \in c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})}$$

est une forme $\mathbb{K}$-linéaire continue sur X, i.e. $\Phi(u) \in X^*$. De plus $\Phi : l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \to X^*$ est $\mathbb{K}$-linéaire bijective et

$$\boxed{\|\Phi(u)\|_{X^*} = \|u\|_1 \quad \textit{pour tout } u \in l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})},$$

i.e. Φ est une **isométrie $\mathbb{K}$-linéaire bijective** *de $(l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ sur $(c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty))^*$. A travers Φ, on identifie $(l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ au dual topologique de $(c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ avec*

$$\boxed{\langle \Phi(u), \zeta \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\zeta(k)}$$

pour tous $u \in l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et $\zeta \in c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

Démonstration. Etape 1. Pour chaque $u \in l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, observons que pour tout $\zeta \in X = c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ la série numérique $\sum u(k)\zeta(k)$ est absolument convergente car $|u(k)\zeta(k)| \leq \|\zeta\|_\infty |u(k)|$, ce qui nous permet de considérer la fonction $\Phi(u) : X = c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{K}$ définie par

$$\Phi(u)(\zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\zeta(k) \quad \text{pour tout } \zeta \in X = c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}).$$

Evidemment $\Phi(u)$ est une forme $\mathbb{K}$-linéaire sur $X = c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et

$$|\Phi(u)(\zeta)| = |\sum_{k=0}^{\infty} u(k)\zeta(k)| \leq \|u\|_1 \|\zeta\|_\infty \quad \text{pour tout } \zeta \in c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}). \tag{21.7}$$

Ainsi $\Phi(u)$ est une forme $\mathbb{K}$-linéaire continue sur $X = c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, i.e. $\Phi(u) \in X^* := (c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)^*$. Nous avons donc une application $\Phi : l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \to E^*$ et il est aisé de voir que Φ est $\mathbb{K}$-linéaire. Remarquons aussi que (21.7) nous assure que $\|\Phi(u)\|_{X^*} \leq \|u\|_1$ pour tout $u \in l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

Etape 2. Fixons $u \in l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ non nul et considérons un réel quelconque ε vérifiant $0 < \varepsilon < \|u\|_1$. Choisissons un entier K_ε tel que $\sum\limits_{k=K_\varepsilon+1}^{\infty} |u(k)| \leq \varepsilon$ (ce qui est possible puisque la série numérique $\sum |u(k)|$ converge). Posons

$$\zeta_\varepsilon(k) = \exp(-i \arg u(k)) \text{ si } k \leq K_\varepsilon \quad \text{et} \quad \zeta(k) = 0 \text{ si } k \geq K_\varepsilon + 1.$$

Alors $\zeta_\varepsilon \in X = c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, $\|\zeta_\varepsilon\|_\infty = 1$ et

$$|\Phi(u)(\zeta_\varepsilon)| = |\sum_{k=0}^{K_\varepsilon} u(k) \exp(-i \arg u(k))| = \sum_{k=0}^{K_\varepsilon} |u(k)| = \|u\|_1 - \sum_{k=K_e+1}^{\infty} |u(k)| \geq \|u\|_1 - \varepsilon,$$

donc $\|\Phi(u)\|_{X^*} \geq \|u\|_1 - \varepsilon$. Ceci combiné avec la dernière inégalité de l' étape 1 donne $\|\Phi(u)\|_{X^*} = \|u\|_1$. Par conséquent

$$\Phi : l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \to X^* = (c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)^*$$

est $\mathbb{K}$-linéaire et conserve les normes.

Etape 3. Il ne reste plus qu'à montrer que Φ est surjective. Soit $\psi \in X^*$, i.e. $\psi : X = c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{K}$ est $\mathbb{K}$-linéaire et continue. Posons

$$u(k) = \psi(e_k) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ considérons $\zeta_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ avec

$$\zeta_n(k) = \exp(-i\psi(e_k)) \text{ pour } k = 0, \cdots, n \text{ et } \zeta_n(k) = 0 \text{ pour } k \geq n+1.$$

Evidemment $\zeta_n \in X = c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, $\|\zeta_n\|_\infty = 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n} |u(k)| = \sum_{k=0}^{n} \exp\big(-i\psi(e_k)\big)\psi(e_k) = \psi\big(\sum_{k=0}^{n} \zeta_n(k) e_k\big) = \psi(\zeta_n) \leq \|\psi\|_{X^*} \|\zeta_n\| = \|\psi\|_{X^*}.$$

Ceci entraîne que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |u(k)| < +\infty$ et donc $u \in l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

Alors nous pouvons considérer $\Phi(u)$ et par définition de ce dernier nous avons

$$\Phi(u)(e_n) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) e_n(k) = u(n) = \psi(e_n),$$

ce qui implique, par linéarité, $\Phi(u)(\zeta) = \psi(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \text{Vect}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = c^{00}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. Comme ce dernier ensemble est dense dans $(c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$, la continuité de $\Phi(u)$ et ψ sur $c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ nous assure que $\Phi(u) = \psi$. D'où la surjectivité de Φ et la fin de la démonstration. ∎

La proposition qui suit fournit une représentation du dual topologique de $l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. Sa démonstration utilise une démarche semblable à celle de la proposition précédente.

Proposition 21.8 *Soient un réel* $p \in [1, +\infty[$, $X = l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ *et* $X^* := (X, \| \ \|_p)^*$ *et soit* $p' \in]1, +\infty]$ *donné par* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Pour chaque* $u \in l^{p'}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ *la fonction* $\Phi(u) : X \to \mathbb{K}$ *définie par*

$$\boxed{\Phi(u)(\zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\zeta(k) \quad \textit{pour tout } \zeta \in l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})}$$

est une forme $\mathbb{K}$*-linéaire continue sur* X, *i.e.* $\Phi(u) \in X^*$. *De plus* $\Phi : l^{p'}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \to X^*$ *est* $\mathbb{K}$*-linéaire bijective et*

$$\boxed{\|\Phi(u)\|_{X^*} = \|u\|_{p'} \quad \textit{pour tout } u \in l^{p'}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})},$$

i.e. Φ *est une* **isométrie $\mathbb{K}$-linéaire bijective** *de* $(l^{p'}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_{p'})$ *sur* $(l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_p))^*$. *A travers* Φ, *on identifie* $(l^{p'}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_{p'})$ *au dual topologique de* $(l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_p)$ *avec*

$$\boxed{\langle \Phi(u), \zeta \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\zeta(k)}$$

pour tous $u \in l^{p'}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ *et* $\zeta \in l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

Démonstration. Exercice. ■

De même en reprenant les deux premières étapes de la proposition 21.7 on obtient le résultat suivant d'injection de $l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ dans le dual topologique de $l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

Proposition 21.9 *Soient* $X = l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ *et* $X^* := (X, \| \ \|_\infty)^*$. *Pour chaque* $u \in l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ *la fonction* $\Phi(u) : X \to \mathbb{K}$ *définie par*

$$\boxed{\Phi(u)(\zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\zeta(k) \quad \textit{pour tout } \zeta \in l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})}$$

est une forme linéaire continue sur X, *i.e.* $\Phi(u) \in X^*$. *De plus* $\Phi : l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \to X^*$ *est linéaire* **injective mais non surjective** *et*

$$\boxed{\|\Phi(u)\|_{X^*} = \|u\|_1 \quad \textit{pour tout } u \in l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})},$$

i.e. Φ *est une* **isométrie linéaire non surjective** *de* $(l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_1)$ *dans* $(l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty))^*$. *A travers* Φ, *on* **injecte** $(l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_1)$ *dans le dual topologique de* $(l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ *avec*

$$\boxed{\langle \Phi(u), \zeta \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\zeta(k)}$$

pour tous $u \in l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ *et* $\zeta \in l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

En fait, pour $X = l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ *et* $\| \ \|_X = \| \ \|_\infty$, *il n'existe aucun homéomophisme (et même aucune application continue surjective) de* $(l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_1)$ *sur* $(X^*, \| \ \|_{X^*})$.

Démonstration. La démonstration que Φ est une application linéaire conservant les normes est laissée **à titre d'exercice**. Il suffit de suivre les deux premières étapes de la démonstration de la proposition 21.7.

Supposons maintenant qu'il existe une application continue surjective de $(l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_1)$ sur $(X^*, \| \ \|_{X^*})$. Comme $(l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_1)$ est séparable, il en serait de même pour $(X^*, \| \ \|_{X^*})$. Ainsi $(l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ serait séparable comme espace normé dont le dual topologique muni de la norme duale est séparable (voir la proposition 18.3), ce qui est absurde car nous savons que $(l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ n'est pas séparable (voir la proposition 21.1). Ceci termine la démonstration de la proposition. ■

Examinons maintenant la réflexivité de ces espaces.

Proposition 21.10 *Les assertions suivantes ont lieu.*
(a) Les espaces de Banach $(c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$, $(l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_1)$ *et* $l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ *ne sont pas réflexifs.*
(b) Pour tout réel $p \in]1, +\infty[$ *l'espace de Banach* $(l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_p)$ *est réflexif.*

Démonstration. (a) Posons $X := c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et $\| \ \|_X := \| \ \|_\infty$, et supposons que $(c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ soit réflexif. Alors $(c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ est en particulier isomorphe à $(X^{**}, \| \ \|_{X^{**}})$. Comme $(X^*, \| \ \|_{X^*})$ est isomorphe à $(l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_1)$ (voir la proposition 21.7), nous obtenons d'après la proposition 21.8 que $(c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ est isomorphe à $(l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$. Ceci est absurde car $(c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ est séparable et $(l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ ne l'est pas. L'espace $(c^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ n'est donc pas réflexif.

Des arguments similaires montrent (**Exer**) que les espaces $(l^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_1)$ et $(l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ ne sont pas réflexifs.
(b) Fixons $p \in]1, +\infty[$ et posons $X := l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et $\| \ \|_X := \| \ \|_p$. Il s'agit de montrer que l'injection canonique $J : X \to X^{**}$ est surjective, i.e. pour chaque $\zeta_0^{**} \in X^{**}$ fixé il existe un $u \in X$ tel que $\zeta_0^{**}(\xi^*) = \xi^*(u)$ pour tout $\xi^* \in X^*$. Soient p' l'exposant conjugué de p et $\Phi : l^{p'}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \to X^*$ l'isométrie linéaire bijective de la proposition 21.8 donnée pour chaque $v \in l^{p'}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ par

$$\Phi(v)(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)\zeta(k) \quad \text{pour tout } \zeta \in X = l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}). \tag{21.8}$$

Alors $\zeta_0^{**} \circ \Phi$ est une forme $\mathbb{K}$-linéaire continue sur $(l^{p'}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \| \ \|_{p'})$. D'après cette même proposition 21.8 (mais cette fois avec $l^{p'}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ pour espace primal) il existe un élément $u \in l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ tel que pour tout $v \in l^{p'}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ on ait $(\zeta_0^{**} \circ \Phi)(v) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u(k)v(k)$, ce qui d'après (21.8) équivaut à $\zeta_0^{**}(\Phi(v)) = \Phi(v)(u)$. Comme Φ est surjective, cela signifie que $\zeta_0^{**}(\xi^*) = \xi^*(u)$ pour tout $\xi^* \in X^*$, et donc l'élément $u \in X$ vérifie la propriété voulue. ■

On a étudié ci-dessus des espaces de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. On peut plus généralement étendre plusieurs des propriétés obtenues au cas d'un ensemble non vide Γ à la place de $\mathbb{N}$. Considérons tout d'abord pour un ensemble non vide Γ l'ensemble

$$l^\infty_{\mathbb{K}}(\Gamma) := \{\zeta \in \mathcal{F}(\Gamma, \mathbb{K}) : \sup_{j \in \Gamma} |\zeta(j)| < +\infty\}.$$

Il correspond à l'ensemble des fonctions bornées de Γ dans K, et donc nous savons que c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que la fonction $\| \ \|_\infty$, avec

$$\|\zeta\|_\infty := \sup_{j \in \Gamma} |\zeta(j)| \quad \text{pour tout } \zeta \in l^\infty_{\mathbb{K}}(\Gamma),$$

est une norme dessus. L'espace $(l^\infty_{\mathbb{K}}(\Gamma), \|\ \|_\infty)$ est un $\mathbb{K}$-espace de Banach. **Si Γ est infini, il n'est pas séparable** (voir la démonstration de la proposition 21.1).

On définit $c^{00}_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ en disant qu'une fonction de Γ dans $\mathbb{K}$ est dans $c^{00}_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ si elle est nulle en dehors d'un ensemble fini. De même, on définit $c^{0}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ en disant qu'une fonction $\zeta : \Gamma \to \mathbb{K}$ est dans $c^{0}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un **ensemble fini** $K \subset \Gamma$ tel que

$$|\zeta(j)| \le \varepsilon \quad \text{pour tout } j \in \Gamma \setminus K.$$

Ce sont (**Exer**) deux $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de $l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et l'espace $(c^0_{\mathbb{K}}(\Gamma), \|\ \|_\infty)$ est de Banach.

Pour une famille $(r_j)_{j\in\Gamma}$ de $\mathbb{R}_+$, convenons de poser dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$\sum_{j\in\Gamma} r_j := \sup_{K\in\mathcal{P}_{\text{fini}}(\Gamma)} \sum_{j\in K} r_j.$$

Soient alors pour $p \in [1, \infty[$

$$l^p_{\mathbb{K}}(\Gamma) := \{\zeta \in \mathcal{F}(\Gamma, \mathbb{K}) : \sum_{j\in\Gamma} |\zeta(j)|^p < +\infty\}$$

et $\|\zeta\|_p := \big(\sum_{j\in\Gamma} |\zeta(j)|^p\big)^{1/p}$ pour tout $\zeta \in l^p_{\mathbb{K}}(\Gamma)$. On montre (**Exer**) que c'est un $\mathbb{K}$-espace de Banach.

22 Espaces des fonctions continues sur un compact

Dans tout ce paragraphe T désignera un espace topologique **compact**. On notera $\mathcal{C}(T, \mathbb{K})$ ou $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(T)$ l'ensemble des fonctions continues de T dans $\mathbb{K}$. Nous savons que c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que la fonction réelle $\|\ \|_\infty$ définie dessus par

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in T} |f(t)| \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(T, \mathbb{K})$$

est une norme. C'est en fait la norme induite par celle de $l^\infty_{\mathbb{K}}(T)$.

Nous savons également que le résultat suivant a lieu.

Proposition 22.1 *Si T est compact, alors $(\mathcal{C}(T, \mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$ est un $\mathbb{K}$-espace de Banach.*

L'étude de la séparabilité résultera du théorème de Stone-Weierstrass du sous-paragraphe qui suit.

22.1 Théorème de Stone-Weierstrass

Commençons par établir le lemme suivant.

Lemme 22.2 *Il existe une suite de fonctions polynomiales réelles sur $[-1, 1]$ convergeant uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction valeur absolue $|\ |$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon \in]0, 1]$ fixé. Remarquons tout d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$0 \le (x^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - |x| = \varepsilon^2\big(\big((x^2 + \varepsilon^2)^{1/2} + |x|\big)^{-1} \le \varepsilon. \tag{22.1}$$

D'autre part, pour $q(t) := (1+t)^{1/2}$ nous savons que la fonction q est développable en série entiére sur $]-1,1[$, i.e. il existe une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $(1+t)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ pour tout $t \in]-1,1[$ et que sur chaque segment contenu dans $]-1,1[$ la fonction somme partielle S_n, avec $S_n(t) := \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, converge uniformément dessus vers la fonction q. Par conséquent $\sup_{|t|\leq(1+\varepsilon^2)^{-1}} |S_n(t) - q(t)| \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc il existe il existe un entier N tel que $\sup_{|t|\leq(1+\varepsilon^2)^{-1}} |S_N(t) - q(t)| \leq \varepsilon$. Comme $|\frac{x^2-1}{1+\varepsilon^2}| < (1+\varepsilon^2)^{-1}$ pour tout $x \in [-1,1]$, nous déduisons de ce qui précède

$$\sup_{|x|\leq 1} |S_N(\frac{x^2-1}{1+\varepsilon^2}) - (1+\frac{x^2-1}{1+\varepsilon^2})^{1/2}| \leq \varepsilon,$$

ce qui entraîne

$$\sup_{|x|\leq 1} |(1+\varepsilon^2)^{1/2} S_N(\frac{x^2-1}{1+\varepsilon^2}) - (x^2+\varepsilon^2)^{1/2}| \leq \varepsilon(1+\varepsilon^2)^{1/2} \leq 2\varepsilon.$$

En combinant ceci avec (22.1) et en posant $P_\varepsilon(x) := (1+\varepsilon^2)^{1/2} S_N(\frac{x^2-1}{1+\varepsilon^2})$, nous obtenons $\sup_{|x|\leq 1} \big| P_\varepsilon(x) - |x| \big| \leq 3\varepsilon$. La suite des fonctions polynomiales $(P_{1/n})_{n\geq 1}$ vérifie donc les propriétés voulues. ■

Pour deux fonctions $f, g : T \to \mathbb{R}$ on notera $f \wedge g$ et $f \vee g$ les fonctions de T dans $\mathbb{R}$ définies par

$$(f \wedge g)(t) := \min\{f(t), g(t)\} \quad \text{et} \quad (f \vee g)(t) := \max\{f(t), g(t)\},$$

donc

$$(f \wedge g)(t) = \frac{1}{2}\big(f(t) + g(t) + |f(t) - g(t)|\big) \ \text{ et } \ (f \vee g)(t) = \frac{1}{2}\big(f(t) + g(t) - |f(t) - g(t)|\big).$$

Lemme 22.3 *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(T,\mathbb{R})$ et soit $adh_{\mathcal{C}}\mathcal{A}$ l'adhérence de $\mathcal{A}$ dans $(\mathcal{C}(T,\mathbb{R}), \| \|_\infty)$. Pour $f, g \in \mathcal{A}$ on a $f \wedge g \in adh_{\mathcal{C}}\mathcal{A}$ et $f \vee g \in adh_{\mathcal{C}}\mathcal{A}$.*

Démonstration. L'ensemble $\mathrm{adh}_{\mathcal{C}}\mathcal{A}$ étant une sous-algèbre de $\mathcal{C}(T,\mathbb{R})$ (**Exer**), il suffit pour $h \in \mathcal{A}$ de montrer que $|h| \in \mathrm{adh}_{\mathcal{C}}\mathcal{A}$. D'après la compacité de T et la continuité de h il existe un réel $r > 0$ tel que $|h(t)| \leq r$ pour tout $t \in T$. Par ailleurs, il est aisé de déduire du lemme précédent par dilatation (**Exer**) qu'il existe une suite de fonctions polynomiales réelles $(P_n)_{n\geq 1}$ convergeant uniformément sur $[-r, r]$ vers la fonction valeur absolue $|\ |$. Il s'ensuit que la suite de fonctions $(P_n \circ h)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $|h|$ sur T, car $\big| P_n \circ h(t) - |h|(t) \big| = \big| P_n(h(t)) - |h(t)| \big|$. La structure d'algébre de $\mathcal{A}$ nous assurant que chaque fonction $P_n \circ h$ est dans $\mathcal{A}$, nous concluons que $|h| \in \mathrm{adh}_{\mathcal{C}}\mathcal{A}$. ■

Lemme 22.4 *Soit $\mathcal{R}$ un sous-ensemble de $\mathcal{C}(T,\mathbb{R})$ tel que $f \wedge g \in adh_{\mathcal{C}}\mathcal{R}$ et $f \vee g \in adh_{\mathcal{C}}\mathcal{R}$ pour $f, g \in \mathcal{R}$. Supposons que pour tout couple $s, t \in T$ avec $s \neq t$ et pour tous $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ il existe une fonction $h \in \mathcal{R}$ telle que $h(s) = r_1$ et $h(t) = r_2$. Alors $\mathcal{R}$ est dense dans $(\mathcal{C}(T,\mathbb{R}), \| \|_\infty)$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(T,\mathbb{R})$. Pour chaque couple $s, t \in T$ avec $s \neq t$ il existe par hypothèse une fonction $f_{s,t} \in \mathcal{R}$ telle que $f_{s,t}(s) = \varphi(s)$ et $f_{s,t}(t) = \varphi(t)$. Pour $t \in T$ choisissons pour chaque $s \in T$, d'après l'inégalité $f_{s,t}(s) > \varphi(s) - \varepsilon$, un voisinage ouvert U_s de s tel que $f_{s,t}(x) > \varphi(x) - \varepsilon$ et compte tenu de la compacité de T choisissons $s_1, \cdots, s_m$ tels que $T = U_{s_1} \cup \cdots \cup U_{s_m}$. La fonction $f_t := f_{s_1,t} \vee \cdots \vee f_{s_m,t} \in \mathrm{adh}_{\mathcal{C}}\mathcal{R}$ d'après l'hypothèse de stabilité du lemme et $f_t(x) > \varphi(x) - \varepsilon$ pour tout $x \in T$. En observant que $f_t(t) = \varphi(t) < \varphi(t) + \varepsilon$ nous pouvons pour chaque $t \in T$ choisir un voisinage ouvert V_t de t tel que $f_t(x) < \varphi(x) + \varepsilon$ pour tout $x \in V_t$. Choisissons alors $t_1, \cdots, t_n \in T$ tels que $T = V_{t_1} \cup \cdots \cup V_{t_n}$ et posons $f := f_{t_1} \wedge \cdots \wedge f_{t_n}$. La fonction $f \in \mathrm{adh}_{\mathcal{C}}\mathcal{R}$ d'après l'hypothèse de stabilité du lemme et d'après la continuité de l'opération $\wedge$, et de plus pour tout $x \in T$ nous avons à la fois $f(x) < \varphi(x) + \varepsilon$ et $f(x) > \varphi(x) - \varepsilon$, i.e. $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Ceci nous assure que $\mathrm{adh}_{\mathcal{C}}\mathcal{R}$ est dense dans $(\mathcal{C}(T, \mathbb{R}), \| \|_\infty)$, ce qui évidemment équivaut à la densité de $\mathcal{R}$ dans l'espace normé $(\mathcal{C}(T, \mathbb{R}), \| \|_\infty)$. ■

Disons qu'un ensemble $\mathcal{G}$ de fonctions de T dans $\mathbb{K}$ sépare les points de T si pour tous $t_1, t_2 \in T$ avec $t_1 \neq t_2$ il existe une fonction $g \in \mathcal{G}$ telle $g(t_1) \neq g(t_2)$.

Théorème 22.5 *(***Théorème de Stone-Weierstrass : version réelle***) Soit T un espace* **compact séparé** *et soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre réelle de $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$ qui contient la fonction constante $\mathbb{1}_T$ (égale à 1 sur T). Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $(\mathcal{C}(T, \mathbb{R}), \| \|_\infty)$ si et seulement si $\mathcal{A}$ sépare les points de T.*

Démonstration. L'espace T étant normal, il est aisé de voir que l'implication $\Rightarrow$ découle du Théorème d'Urysohn. Montrons l'implication inverse. Fixons $\varepsilon > 0$ et $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Pour chaque couple (s, t) avec $s, t \in T$ et $s \neq t$, par hypothèse il existe une fonction $g_{s,t} \in \mathcal{A}$ telle que $g_{s,t}(s) \neq g_{s,t}(t)$. il existe alors deux réels α et β tels que

$$\alpha g_{s,t}(s) + \beta = r_1 \quad \text{et} \quad \alpha g_{s,t}(t) + \beta = r_2.$$

La fonction $f_{s,t} := \alpha g_{s,t} + \beta$ vérifie $f_{s,t}(s) = r_1$ et $f_{s,t}(t) = r_2$, et $f_{s,t} \in \mathcal{A}$ car $\mathbb{1}_T \in \mathcal{A}$ par hypothèse. L'implication désirée résulte donc des deux derniers lemmes ci-dessus. ■

Enonçons le cas complexe.

Théorème 22.6 *(***Théorème de Stone-Weierstrass : version complexe***) Soit T un espace* **compact séparé** *et soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre complexe de $\mathcal{C}(T, \mathbb{C})$ qui contient la fonction constante $\mathbb{1}_T$ (égale à 1 sur T). Supposons aussi que $\mathcal{A}$ soit stable par conjuguaison, i.e. la fonction $\bar{f}$, définie par $\bar{f}(t) := \overline{f(t)}$, est dans $\mathcal{A}$ pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $(\mathcal{C}(T, \mathbb{R}), \| \|_\infty)$ si et seulement si $\mathcal{A}$ sépare les points de T.*

Démonstration. L'implication $\Rightarrow$ résulte comme ci-dessus du théorème d'Urysohn. Pour l'implication inverse posons $\mathcal{A}_r := \{\mathcal{R}e\, f : f \in \mathcal{A}\}$. Comme $\mathcal{R}e\, f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$, grâce à l'hypothèse de stabilité par conjuguaison nous avons $\mathcal{A}_r \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_r$ est une sous-algèbre réelle de $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$. Elle contient la fonction $\mathbb{1}_T$ et elle sépare les points de T car si $f(s) \neq f(t)$ alors $(\mathcal{R}e\, f)(s) \neq (\mathcal{R}e\, f)(t)$ ou $\big(\mathcal{R}e\,(if)\big)(s) \neq \big(\mathcal{R}e\,(if)\big)(t)$. La version réelle nous dit que $\mathcal{A}_r$ est dense dans $(\mathcal{C}(T, \mathbb{R}), \| \|_\infty)$. Comme $\mathcal{A} = \mathcal{A}_r + i\mathcal{A}_r$, nous en déduisons que $\mathcal{A}$ est dense dans $(\mathcal{C}(T, \mathbb{C}), \| \|_\infty)$. ■

Du théorème de Stone-Weierstrass on obtient le résultat de séparabilité suivant.

Corollaire 22.7 *Soit T un compact de $\mathbb{R}^m$. Alors l'espace de Banach $(\mathcal{C}(T, \mathbb{R}), \| \|_\infty)$ est séparable.*

Démonstration. D'après le théorème de Stone-Weierstrass l'ensemble $\mathcal{A}$ des fonctions réelles polynomiales sur T est dense dans $(\mathcal{C}(T, \mathbb{R}), \| \|_\infty)$ car c'est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$ qui sépare les points de T et qui contient la fonction $\mathbb{1}_T$. L'ensemble dénombrable des fonctions polynomiales sur T et à coefficients dans $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathcal{A}$ pour la topologie induite, la propriété de séparabilité désirée s'ensuit. ■